

16. Zemeljsko ozračje

Zrak pogosto obravnavamo povsem enako kot prazen prostor (vakuum), ki za radijsko valovanje nima dielektričnih $\epsilon \approx \epsilon_0$ lastnosti niti feromagnetnih $\mu \approx \mu_0$ lastnosti niti izgub $\gamma \approx 0$. Pri tlaku $p \approx 1\text{bar}$ so plini sicer za tri velikostne razrede redkejši od tekočin in trdnih snovi, vendar še vedno učinkujejo na elektromagnetno valovanje. Radijske valove ločijo od svetlobe rezonance molekul zraka, kjer v vmesnem področju slabljenje preseže -1000dB/km .

Učinki na elektromagnetno valovanje se razlikujejo glede na gostoto in sestavo ozračja. Gostota ozračja zvezno upada z višino vse do "praznine" vesolja, ki sploh ni dober vakuum! Temperatura ozračja z nadmorsko višino h upada (troposfera, mezosfera) oziroma z nadmorsko višino h narašča (stratosfera, termosfera) zaradi različnih fizikalnih pojavov:

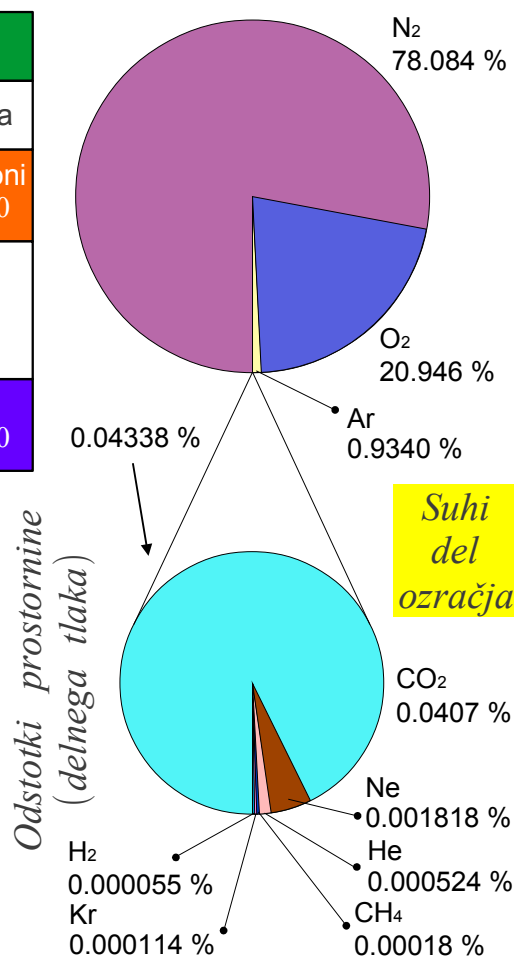
Plast ozračja	Višina h	Temperatura	EM učinek
Eksosfera	$>700\text{km}$	$dT/dh \approx 0$	Praznina vesolja
Termosfera	$80\text{km} - 700\text{km}$	$dT/dh > 0$	Ionosfera elektroni $\epsilon_r(\omega) < 1$ $\gamma(\omega) > 0$
Mezosfera	$50\text{km} - 80\text{km}$	$dT/dh < 0$	Brez večjega učinka (O_3)
Stratosfera	$12\text{km} - 50\text{km}$	$dT/dh > 0$	
Troposfera	$0 - 12\text{km}$	$dT/dh < 0$	Nevtralni plini $\epsilon_r(\omega) > 1$ $\gamma(\omega) > 0$

Mokri del ozračja

0.4% vodne pare v povprečju
1% vodne pare ob gladini morja
5% vodne pare v vročih tropskih krajih

vsebnost vodne pare hitro upada s temperaturo/višino

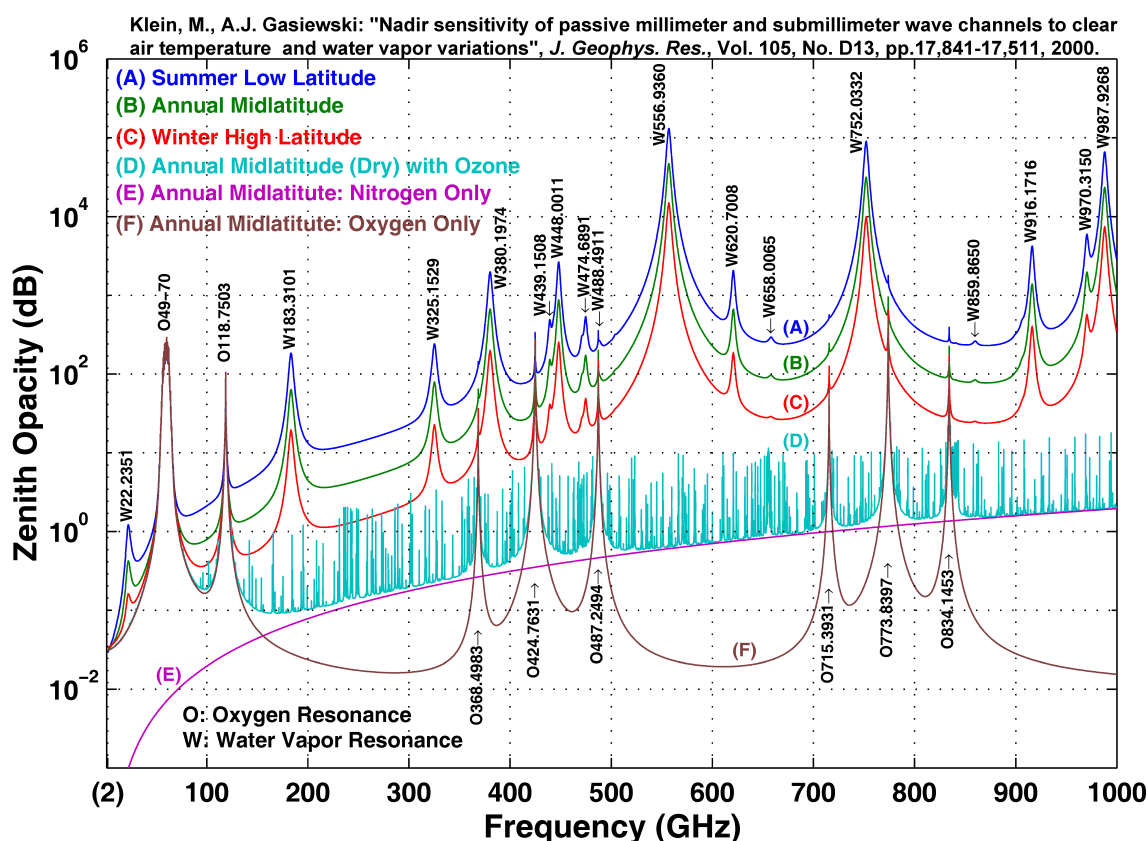
Sestava zemeljskega ozračja



Odstotke sestavin ozračja običajno pišemo kot prostorninske deleže oziroma delne tlake sestavin. Molekula kisika O_2 je le malenkost težja od

molekule dušika N_2 oziroma atomov argona Ar . Pač pa so molekule vodne pare H_2O skoraj pol lažje od molekule kisika, zato je masni delež vodne pare skoraj pol manjši od njenega prostorninskega deleža. Vodna para je prozoren plin, ki ga ne vidimo za razliko od oblakov iz kapljic tekoče vode oziroma iz kristalčkov ledu.

Od vseh sestavin ozračja brez oblakov imata na radijske valove največji učinek vodna para H_2O in molekularni kisik O_2 . Vodna para ima najnižjo rezonančno frekvenco $f \approx 22\text{GHz}$, molekularni kisik O_2 pa več rezonanc v frekvenčnem pasu okoli $f \approx 60\text{GHz}$. Ozon O_3 v stratosferi vpija številne ozke in šibke črte:

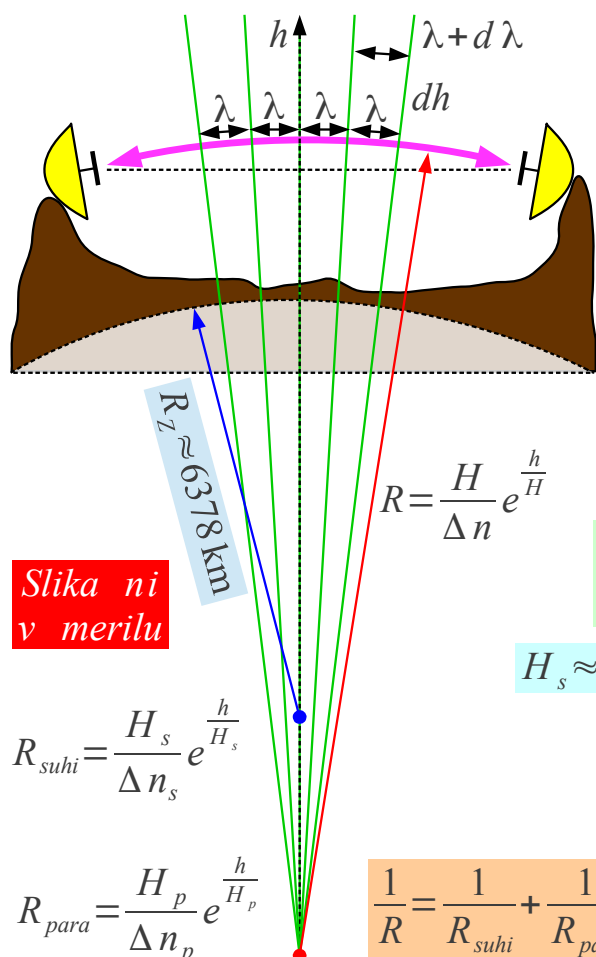


Zenitno slabljenje zemeljskega ozračja

Slabljenje vodne pare pri frekvenci $f \approx 22\text{GHz}$ zelo niha okoli povprečne vrednosti -0.2dB/km tik nad morsko gladino glede na vsebnost vodne pare, ki s temperaturo narašča. Slabljenje kisika v pasu $f \approx 60\text{GHz}$ dosega -14dB/km tik nad morsko gladino. Izredno močna rezonanca vodne pare pri $f \approx 558\text{GHz}$ dodaja širokopasovno slabljenje tudi na dosti nižjih frekvencah v pasu $20\text{GHz} < f < 200\text{GHz}$.

Lomni količnik ozračja se za radijske valove in vidno svetlobo le

malenkost razlikuje od enote. Odstopanje lomnega količnika od enote $\Delta n e^{-h/H}$ v troposferi eksponentno upada z višino po barometerski enačbi. Kljub močnim resonancam kisika okoli $f \approx 60\text{GHz}$ odstopanje lomnega količnika Δn upade za manj kot odstotek pod $f < 100\text{GHz}$ in se razpolovi za vidno svetlobo:



Lom radijskih valov v troposferi

Dobro premešano ozračje

$$n(h) = \sqrt{\epsilon_r(h)} \approx 1 + \Delta n e^{-\frac{h}{H}}$$

Suhi del

$$H_s \approx \begin{cases} 9\text{km} & \text{poleti} \\ 8\text{km} & \text{pozimi} \end{cases}$$

$$\Delta n_s \approx \begin{cases} 0.0003 & \text{radio} \\ 0.00015 & \text{vidna svetloba} \end{cases}$$

Podobni trikotniki $\frac{\lambda}{R} = \frac{\lambda + d\lambda}{R + dh} = \frac{d\lambda}{dh}$

$$\lambda(h) = \frac{\lambda_0}{n(h)} \rightarrow \frac{d\lambda}{dh} = -\frac{\lambda_0}{n^2} \frac{dn}{dh} \approx \lambda \frac{\Delta n}{H} e^{-\frac{h}{H}}$$

$$H_s \approx 8.5\text{km} \rightarrow R_{\text{suhi}}(h=0) \approx 28333\text{km} \text{ (radio)}$$

Upoštevanje vodne pare $H_p \approx 1.5\text{km}$

$$n(h) \approx 1 + \Delta n_s e^{-\frac{h}{H_s}} + \Delta n_p e^{-\frac{h}{H_p}}$$

$$R(h=0) \approx \begin{cases} 25000\text{km} & \text{radio} \\ 50000\text{km} & \text{vidna svetloba} \end{cases}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{\text{suhi}}} + \frac{1}{R_{\text{para}}}$$

Majhne spremembe lomnega količnika z višino imajo velik učinek na vodoravno radijsko zvezo ali svetlobno opazovanje. Ker lomni količnik upada z višino, se valovne fronte pahljačasto odpirajo. Iz podobnih trikotnikov lahko izračunamo krivinski polmer loka R , po katerem potuje valovanje. V zemeljskem ozračju niti svetloba ne potuje premočrtno!

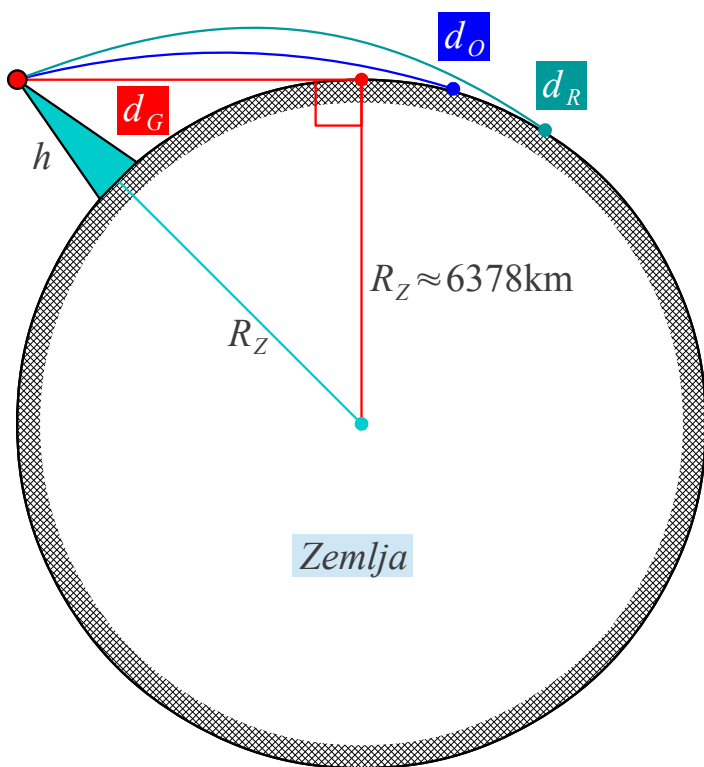
V dobro premešanem ozračju je razmeroma preprosto določiti lom radijskih valov oziroma svetlobe v suhih sestavinah: dušik, kisik, argon. Poleti se ozračje otopli in napihne, da konstanta v eksponentu naraste na

$H_s \approx 9\text{km}$. Pozimi se ozračje ohladi in skrči, da konstanta v eksponentu upade na $H_s \approx 8\text{km}$. Povprečna vrednost $H_s \approx 8.5\text{km}$ daje krivinski polmer radijskih valov $R_{\text{suhi}} \approx 28333\text{km}$ v popolnoma suhem ozračju brez vodne pare tik nad morsko gladino.

Težje je določiti učinek vodne pare, ker se njen delež v ozračju zelo spreminja. Tlak nasičenja vodne pare hitro upada s temperaturo, zato delež vodne pare hitro upada z nadmorsko višino. Razmeroma majhna konstanta $H_p \approx 1.5\text{km}$ zelo povečuje lom valovanja v prisotnosti vodne pare.

Slika ni v merilu

Ozračje $n(h)$



Geometrijska, optična in radijska vidljivost

$$R \approx \begin{cases} 25000\text{km} & \text{radio} \\ 50000\text{km} & \text{vidna svetloba} \end{cases}$$

Odštevanje ukrivljenosti

$$\frac{1}{R_{eff}} = \frac{1}{R_Z} - \frac{1}{R}$$

$$R_{eff} \approx \begin{cases} 8562\text{km} & \text{radio} \\ 7310\text{km} & \text{vidna svetloba} \end{cases}$$

$$K = \frac{R_{eff}}{R_Z} \approx \frac{4}{3} \quad (\text{radio})$$

Geometrijska vidljivost

$$d_G = \sqrt{(R_Z + h)^2 - R_Z^2} \approx \sqrt{2 R_Z h}$$

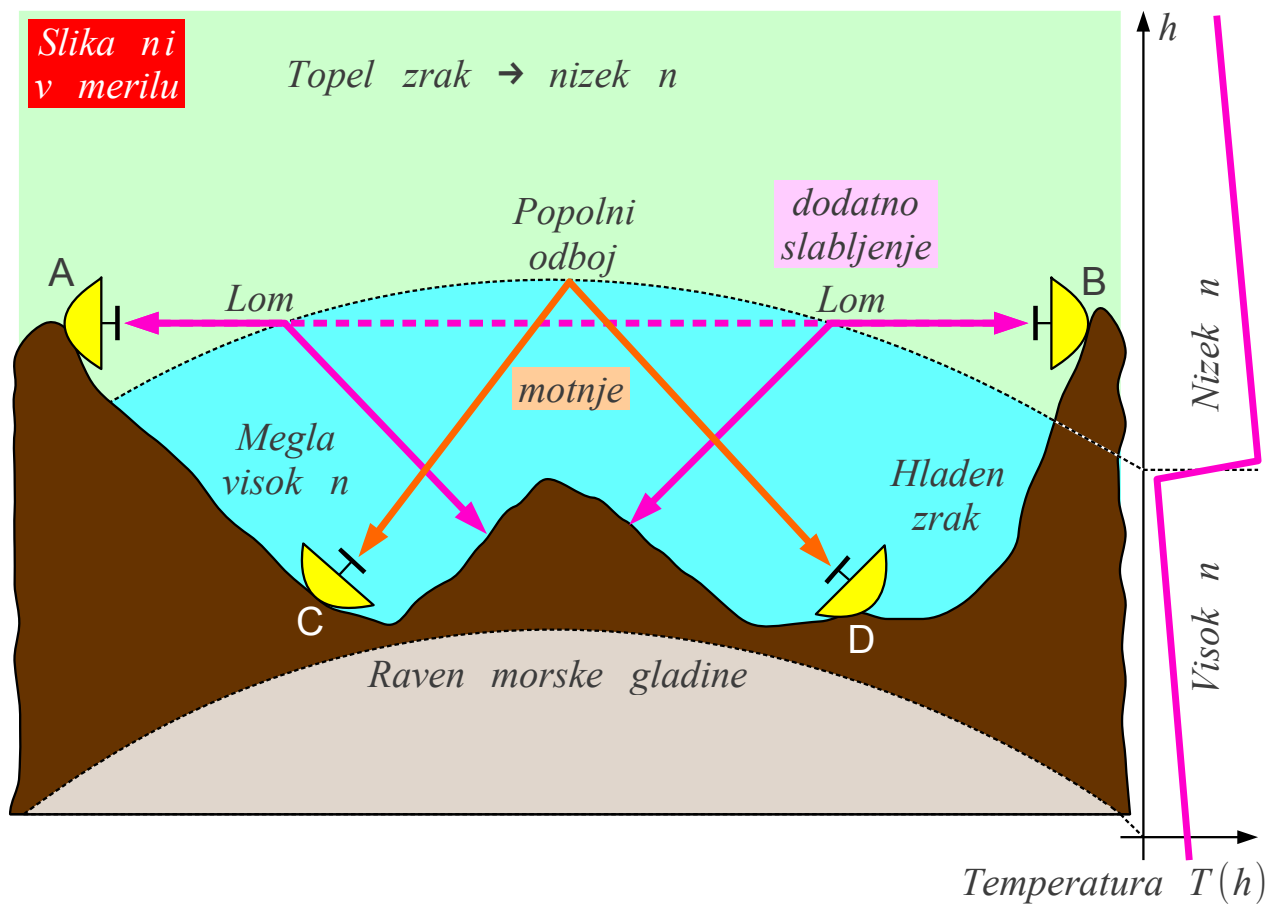
$$\text{Zgled } h=100\text{m} \rightarrow d_G \approx 35.7\text{km}$$

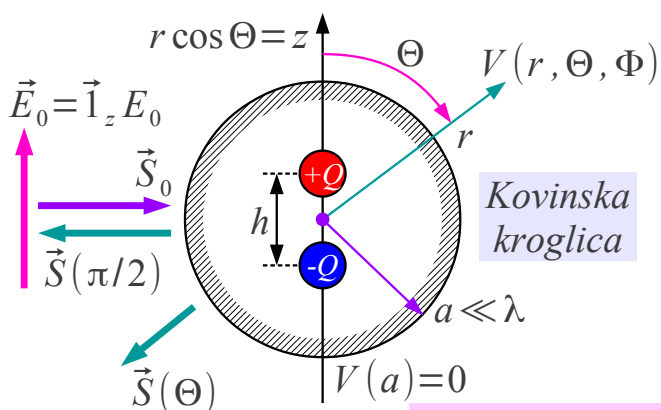
Optična/radijska vidljivost

$$d = \sqrt{(R_{eff} + h)^2 - R_{eff}^2} \approx \sqrt{2 R_{eff} h}$$

Zgled $h=100\text{m} \rightarrow$

$$d \approx \begin{cases} 41.4\text{km} & \text{radio} \\ 38.2\text{km} & \text{vidna svetloba} \end{cases}$$





Prazen prostor $\Delta V + k^2 V = 0$

$a \ll \lambda \rightarrow$ Statika $\Delta V \approx 0$

Pogoja $V(a) = 0$ in $V(\infty) = -E_0 z$

$$V(r, \Theta, \Phi) = E_0 \left(-r + \frac{a^3}{r^2} \right) \cos \Theta$$

$$\text{Statika } V(r, \Theta, \Phi) = \frac{Qh}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \Theta}{r^2}$$

Zveznost $I = j\omega Q$

Sevanje točkastega dipola $\vec{E} \approx \vec{1}_\Theta \frac{jkZ_0}{4\pi} Ih \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \Theta$

$$Qh = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_0 \rightarrow Ih = 4\pi\epsilon_0 j\omega a^3 E_0 \rightarrow \vec{E} \approx -\vec{1}_\Theta k^2 a^3 E_0 \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \Theta$$

$$\text{Gostota sevanje moči } \vec{S}(\Theta) = \vec{1}_r \frac{|\vec{E}|^2}{2Z_0} = \vec{1}_r k^4 a^6 \frac{|E_0|^2}{2Z_0} \frac{\sin^2 \Theta}{r^2} = \vec{1}_r k^4 a^6 |\vec{S}_0| \frac{\sin^2 \Theta}{r^2}$$

$$\vec{S}(\Theta) = \vec{1}_r \frac{|\vec{S}_0| \sigma}{4\pi r^2} \quad \& \quad \sin \Theta = 1 \rightarrow \sigma = 4\pi r^2 \frac{|\vec{S}(\pi/2)|}{|\vec{S}_0|} = 4\pi k^4 a^6 = 64\pi^5 \frac{a^6}{\lambda^4}$$

Odmevna površina majhne krogle

$$\text{Dielektrična kroglca} \quad \sigma = 64\pi^5 \frac{a^6}{\lambda^4} \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2$$

Dežna kapljica $\sigma = \frac{\pi^5}{\lambda^4} \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 (2a)^6$

$\left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 = |K|^2 \equiv \text{delektrični faktor}$

$\left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 \approx \begin{cases} 0.93 & (\text{voda } \epsilon_r \approx 80) \\ 0.207 & (\text{led } \epsilon_r \approx 3.5) \\ 1 & (\text{kovina } \epsilon_r \rightarrow \infty) \end{cases}$

Naključna faza $\rightarrow \sigma = \sum_i \sigma_i$

$Z = \frac{1}{\Delta V} \sum_i (2a_i)^6 \equiv \text{faktor odboja}$

$\eta = \frac{d\sigma}{dV} = \frac{\pi^5}{\lambda^4} \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 Z \leftarrow Z [\text{m}^3]$

Dež $\sigma = V \eta = V \frac{\pi^5}{\lambda^4} \left| \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right|^2 Z$

Odmevna površina padavin

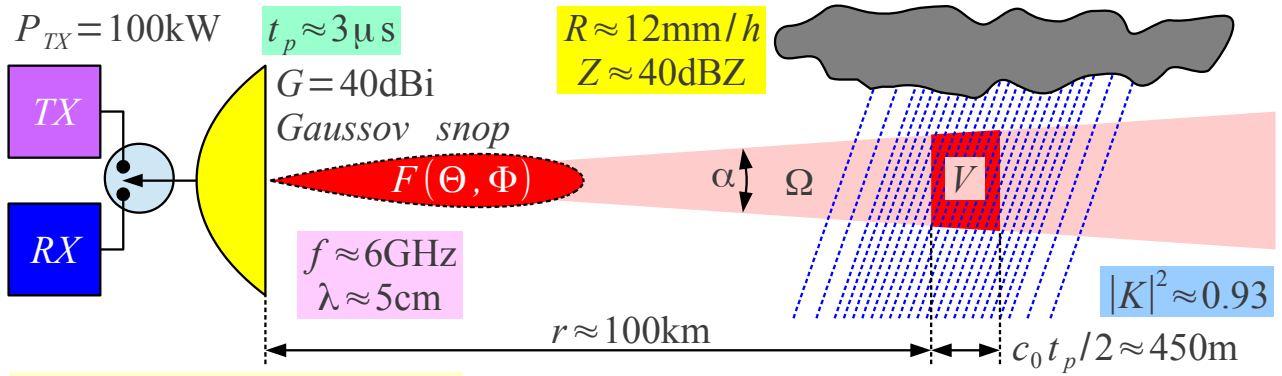
J. S. Marshall & W. M. Palmer 1948

$R \left[\frac{\text{mm}}{\text{h}} \right] \equiv \text{jakost padavin}$

$Z \left[\frac{\text{mm}^6}{\text{m}^3} \right] = 200 R^{1.6} \quad R = \left(\frac{Z}{200} \right)^{0.625}$

$Z_{\text{dBZ}} = 10 \log_{10} \frac{Z}{Z_0} \quad Z_0 = \frac{1 \text{ mm}^6}{1 \text{ m}^3} = 10^{-18} \text{ m}^3$

<i>Padavine</i>	<i>R[mm/h]</i>	<i>Z[dBZ]</i>	<i>Z[m³]</i>	<i>Barva</i>
<i>Toča</i>	205mm/h	60dBZ	10 ⁻¹² m ³	
	100mm/h	55dBZ	3·10 ⁻¹³ m ³	
<i>Naliv</i>	49mm/h	50dBZ	10 ⁻¹³ m ³	
	24mm/h	45dBZ	3·10 ⁻¹⁴ m ³	
<i>Dež</i>	12mm/h	40dBZ	10 ⁻¹⁴ m ³	
	5.6mm/h	35dBZ	3·10 ⁻¹⁵ m ³	
	2.7mm/h	30dBZ	10 ⁻¹⁵ m ³	
<i>Rosenje</i>	1.3mm/h	25dBZ	3·10 ⁻¹⁶ m ³	
	0.6mm/h	20dBZ	10 ⁻¹⁶ m ³	



$$\vec{S}_0 = \vec{1}_r \frac{P_{TX} G}{4\pi r^2} \frac{|F(\Theta, \Phi)|^2}{|F(\Theta_{MAX}=0)|^2}$$

$$dV = \frac{c_0 t_p}{2} r^2 d\Omega$$

$$\eta = \frac{d\sigma}{dV} = \frac{\pi^5}{\lambda^4} |K|^2 Z$$

$$40\text{dBZ} = 10^{-14} \text{m}^3$$

$$dP_{RX} = \frac{G \lambda^2}{4\pi} \frac{|F(\Theta, \Phi)|^2}{|F(\Theta_{MAX}=0)|^2} |d\vec{S}|$$

$$d\vec{S} = \frac{-\vec{S}_0}{4\pi r^2} \eta dV$$

Stožčast snop

$$F(\Theta) = \begin{cases} 1 & (\Theta < \alpha/2) \\ 0 & (\Theta > \alpha/2) \end{cases}$$

$$I = \Omega \approx \frac{4\pi}{G}$$

$$P_{RX} = \frac{P_{TX} G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^2} \eta \frac{c_0 t_p}{2} I \quad I = \iint_{4\pi} \left(\frac{|F(\Theta, \Phi)|^2}{|F(\Theta_{MAX}=0)|^2} \right)^2 d\Omega$$

$$P_{RX} \approx \frac{P_{TX} G \lambda^2}{64 \pi^2 r^2} \eta c_0 t_p = \frac{P_{TX} G \pi^3 c_0 t_p |K|^2}{64 r^2 \lambda^2} Z \approx 1.62 \cdot 10^{-10} \text{W}$$

Gaussov snop

$$|F(\Theta)|^2 = e^{-(\Theta/\Theta_{-3\text{dB}})^2 \ln 2}$$

$$I \approx \frac{\pi \Theta_{-3\text{dB}}^2}{2 \ln 2} \approx \frac{2\pi}{G}$$

Vremenski radar

$$P_{RX} \approx 162\text{pW} \approx -67.9\text{dBm}$$

$$I = \iint_{4\pi} \left(\frac{|F(\Theta, \Phi)|^2}{|F(\Theta_{MAX}=0)|^2} \right)^2 d\Omega$$

$$\text{Gaussov snop } |F(\Theta)|^2 = e^{-(\Theta/\Theta_{-3dB})^2 \ln 2}$$

$$\text{Rotacijsko-simetričen snop } \alpha_E = \alpha_H = 2\Theta_{-3dB}$$

$$I = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(e^{-(\Theta/\Theta_{-3dB})^2 \ln 2} \right)^2 \sin \Theta d\Theta d\Phi$$

$$D = \frac{4\pi |F(\Theta_{MAX}=0)|^2}{\iint_{4\pi} |F(\Theta, \Phi)|^2 d\Omega}$$

$$\text{Kraussov približek} \\ D \approx \frac{\pi}{\Theta_{-3dB}^2}$$

$$I = 2\pi \int_0^\pi e^{-2(\Theta/\Theta_{-3dB})^2 \ln 2} \sin \Theta d\Theta$$

$$D = \frac{4\pi}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-(\Theta/\Theta_{-3dB})^2 \ln 2} \sin \Theta d\Theta d\Phi}$$

$$I \approx 2\pi \int_0^\infty e^{-2(\Theta/\Theta_{-3dB})^2 \ln 2} \Theta d\Theta$$

$$\Theta_{-3dB} \ll 1 \\ \sin \Theta \approx \Theta$$

$$D \approx \frac{2}{\int_0^\infty e^{-(\Theta/\Theta_{-3dB})^2 \ln 2} \Theta d\Theta}$$

$$u = (\Theta/\Theta_{-3dB})^2$$

$$\text{Brezizgubna} \\ \text{antena } G \approx D$$

$$I \approx \pi \Theta_{-3dB}^2 \int_0^\infty e^{-2u \ln 2} du = \frac{\pi \Theta_{-3dB}^2}{2 \ln 2}$$

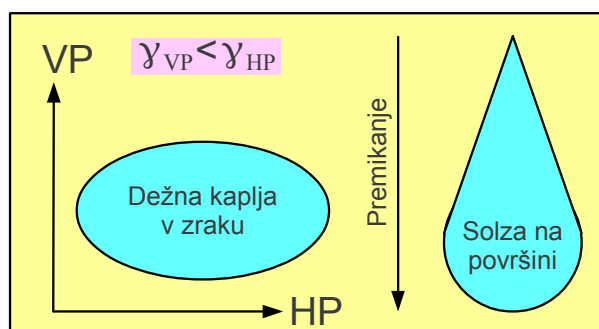
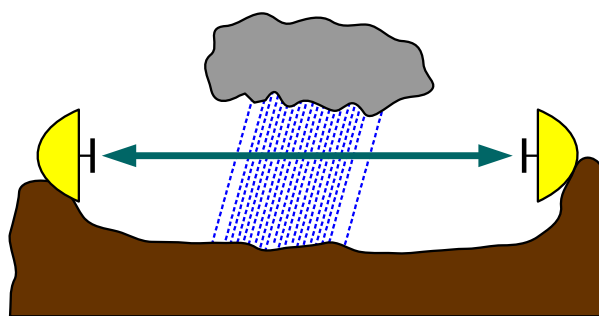
$$G \approx \frac{4}{\Theta_{-3dB}^2 \int_0^\infty e^{-u \ln 2} du} = \frac{4 \ln 2}{\Theta_{-3dB}^2} \approx \frac{2.77}{\Theta_{-3dB}^2}$$

Gaussov snop

$$I \approx \frac{\pi \Theta_{-3dB}^2}{2 \ln 2} \approx \frac{2\pi}{G}$$

$$\Theta_{-3dB}^2 \approx \frac{4 \ln 2}{G} \approx \frac{2.77}{G}$$

Dielektrične lastnosti vode		
f	$\epsilon_r = \epsilon_r' - j\epsilon_r''$	$n = \sqrt{\epsilon_r}$
300GHz	5.81-j4.85	2.59-j0.94
150GHz	6.75-j9.57	3.04-j1.57
100GHz	8.26-j14.07	3.50-j2.01
60GHz	12.69-j22.00	4.36-j2.52
30GHz	26.40-j34.22	5.90-j2.90
18.5GHz	42.54-j35.62	7.00-j2.54
16GHz	50.00-j37.50	7.50-j2.50
11GHz	61.16-j32.12	8.07-j1.99
6GHz	73.72-j20.84	8.67-j1.20
4GHz	76.08-j16.05	8.77-j0.92
3GHz	78.30-j11.14	8.87-j0.63
2GHz	79.32-j7.53	8.92-j0.42
1.43GHz	80.92-j4.95	9.00-j0.28



Priporočilo ITU-R P.838-3

$$\gamma [\text{dB/km}] = k(f) (R [\text{mm/h}])^{\alpha(f)}$$

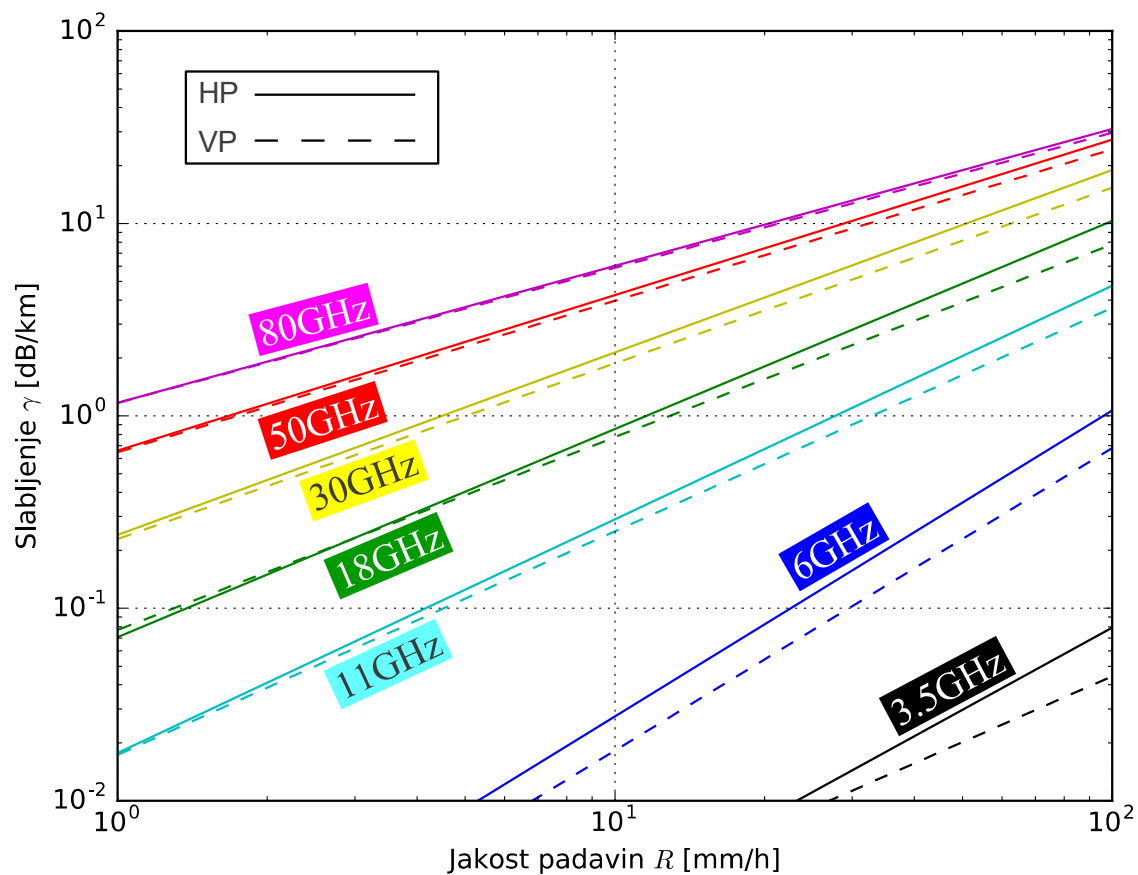
Enačbe/tabele za $k(f)$ & $\alpha(f)$
posebej za HP oziroma za VP

Slabljenje padavin

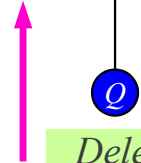
$$\gamma = -a_{\text{dB}}/l$$

f (GHz)	k_{HP}	α_{HP}	k_{VP}	α_{VP}
3.5	0.0001155	1.4189	0.0002346	1.1387
6	0.0007056	1.5900	0.0004878	1.5728
11	0.01772	1.2140	0.01731	1.1617
18	0.07078	1.0818	0.07708	1.0025
30	0.2403	0.9485	0.2291	0.9129
50	0.6600	0.8084	0.6472	0.7871
80	1.1704	0.7115	1.1668	0.7021

Slabljenje padavin pri $f=3.5, 6, 11, 18, 30, 50, 80\text{GHz}$ po ITU-R 838-3



$$\vec{F} = Q \vec{E} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = j \omega m \vec{v} \rightarrow \vec{v} = \frac{Q}{j \omega m} \vec{E}$$



Delec
masa m

$$\vec{J}_{konvektivni} = N Q \vec{v} \quad N [\text{m}^{-3}] \equiv \text{gostota delcev v prostoru}$$

$$\vec{J}_{konvektivni} = \sum_i \frac{N_i Q_i^2}{j \omega m_i} \vec{E} \quad \left(\begin{array}{l} \text{različni} \\ \text{delci } i \end{array} \right)$$

Elektron
 $Q_e \approx -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$
 $m_e \approx 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$$\text{Ionosfera: } \vec{J}_{konvektivni} = \frac{N_e Q_e^2}{j \omega m_e} \vec{E} + \frac{N_p Q_p^2}{j \omega m_p} \vec{E} + \dots \left(\begin{array}{l} \text{težji} \\ \text{delci} \end{array} \right)$$

Proton
 $Q_p \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$
 $m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Ampère :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + j \omega \epsilon_0 \vec{E} \approx \frac{N_e Q_e^2}{j \omega m_e} \vec{E} + j \omega \epsilon_0 \vec{E} = j \omega \epsilon_0 \left(1 - \frac{N_e Q_e^2}{\omega^2 \epsilon_0 m_e} \right) \vec{E} = j \omega \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\epsilon_r = 1 - \frac{N_e Q_e^2}{\omega^2 \epsilon_0 m_e} = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 = 1 - \left(\frac{f_p}{f} \right)^2$$

$$f < f_p \rightarrow \text{prevodnik}$$

$f_p \equiv \text{frekvenca plazme}$

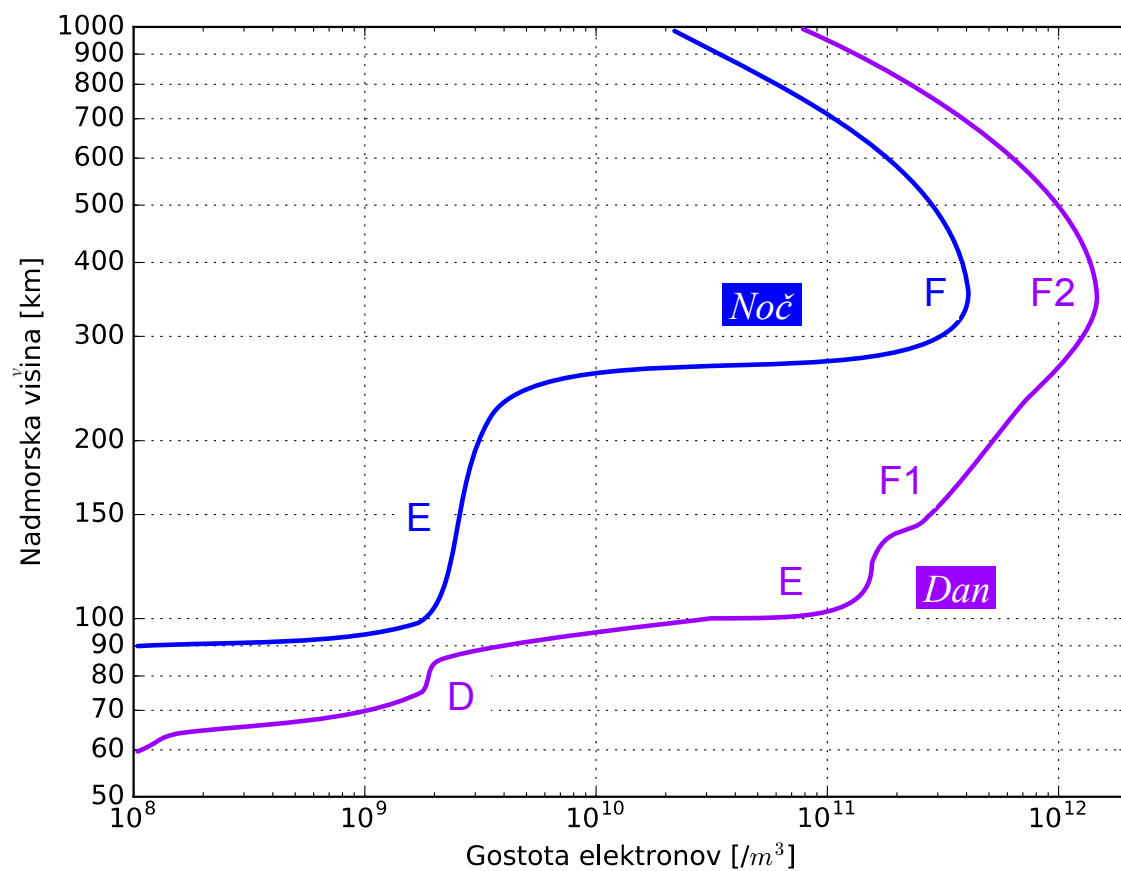
$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{N_e Q_e^2}{\epsilon_0 m_e}} \approx \sqrt{80.6 \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2} N_e} \approx \begin{cases} 11 \text{ MHz} & \text{dan} \\ 5 \text{ MHz} & \text{noč} \end{cases}$$

$$f > f_p \rightarrow \text{dielektrik}$$

$$n = \sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f} \right)^2} < 1$$

Dielektričnost in lomni količnik ionosfere

Gostota elektronov v ionosferi Zemlje



$$n(h) = \sqrt{1 - \left(\frac{f_p(h)}{f} \right)^2} < 1$$

Popolni odboj

$$n = \sin \Theta \approx \frac{R_Z}{R_Z + h}$$

$$\frac{R_Z}{R_Z + h} = \sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f} \right)^2}$$

$$\left(\frac{f}{f_p} \right)^2 = \frac{(R_Z + h)^2}{(R_Z + h)^2 - R_Z^2}$$

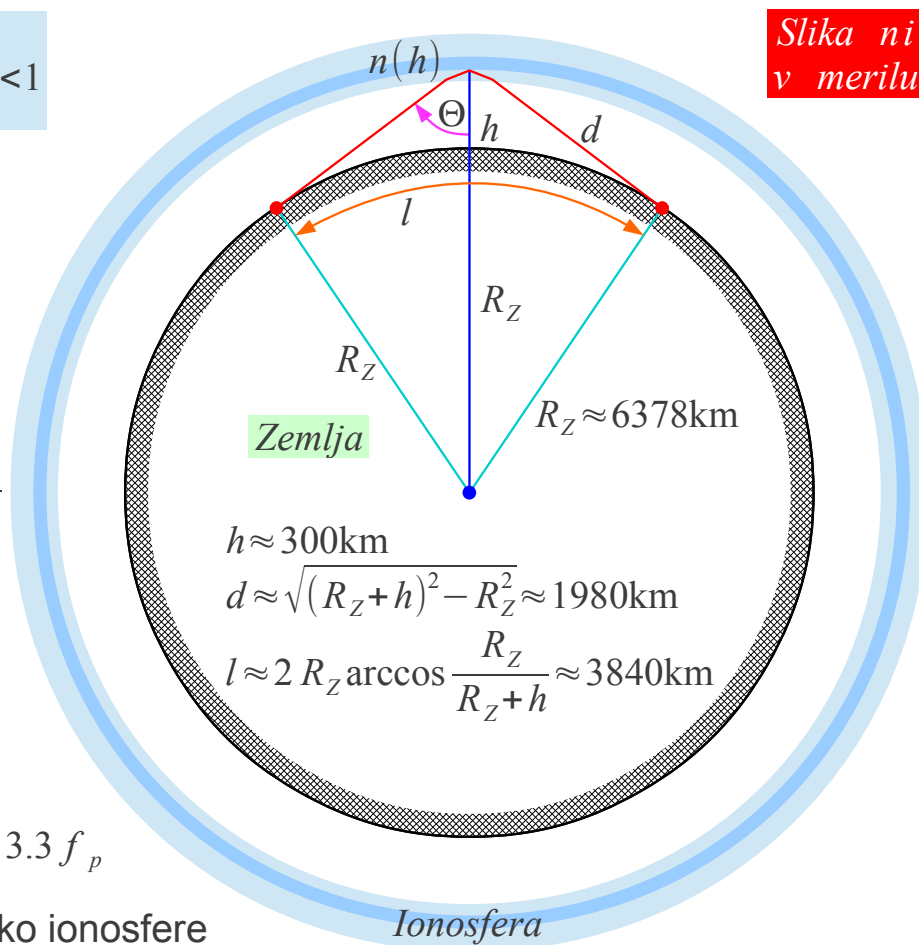
$$h \ll R_Z$$

$$f \approx f_p \sqrt{\frac{R_Z}{2h}}$$

$$h_{MAX} \approx 300 \text{ km}$$

$$MUF \approx f_p \sqrt{\frac{R_Z}{2h_{MAX}}} \approx 3.3 f_p$$

Radijska zveza preko ionosfere



Hitrosti valovanja v ionosferi

$$\beta = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - (\omega_p/\omega)^2} = \frac{1}{c_0} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

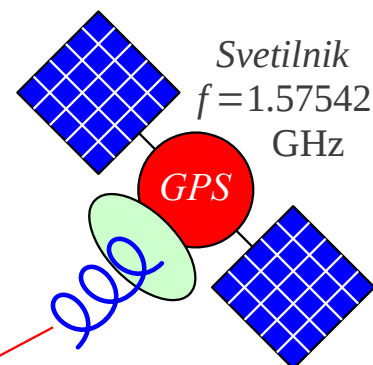
$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{c_0} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$$

Fazna hitrost $v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - (\omega_p/\omega)^2}} > c_0$

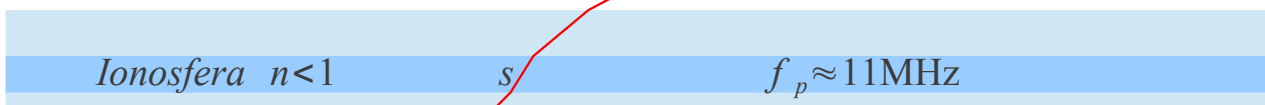
$$f_p^2 = \frac{N_e(s) Q_e^2}{4\pi^2 \epsilon_0 m_e}$$

Skupinska hitrost $v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = c_0 \sqrt{1 - (\omega_p/\omega)^2} < c_0$

$$f \gg f_p \rightarrow \begin{aligned} v_f &\approx c_0 + \Delta v \\ v_g &\approx c_0 - \Delta v \end{aligned} \quad \Delta v = \frac{c_0}{2} (f_p/f)^2$$



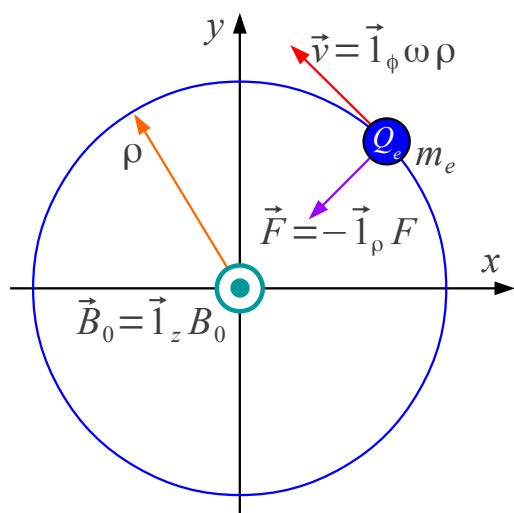
$$TEC [m^{-2}] = \int_s N_e(s) ds$$



$$t = \int_s \frac{ds}{v(s)} = \int_s \frac{ds}{c_0 \pm \Delta v} \approx \frac{s}{c_0} \mp \int_s \frac{\Delta v}{c_0^2} ds = \frac{s}{c_0} \mp \int_s \frac{(f_p/f)^2}{2c_0} ds$$

$$\Delta r = c_0 \Delta t \approx \int_s \frac{\mp N_e(s) Q_e^2}{8\pi^2 \epsilon_0 m_e f^2} ds = \frac{\mp Q_e^2 TEC}{8\pi^2 \epsilon_0 m_e f^2} \approx \mp 40.3 \frac{m^3}{s^2} \frac{TEC}{f^2}$$

$$TEC \approx 10^{18} m^{-2} \rightarrow \Delta r \approx \mp 16.2 m$$



Kroženje $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{l}_\rho \omega \rho \frac{d\phi}{dt} = -\vec{l}_\rho \omega^2 \rho$

$$\vec{F} = m_e \vec{a} = -\vec{l}_\rho m_e \omega^2 \rho$$

Elektron
 $Q_e \approx -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$
 $m_e \approx 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Lorentzova sila $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

$$\vec{F} = Q_e \vec{v} \times \vec{B}_0 = \vec{l}_\rho Q_e \omega \rho B_0$$

$$\omega_g = \frac{-Q_e B_0}{m_e}$$

Zemlja $H_0 \approx 40 \text{ A/m}$

$$f_g = \frac{|Q_e| \mu_0 H_0}{2 \pi m_e} \approx 1.4 \text{ MHz}$$

Žiromagnetna rezonanca v ionosferi

Lorentzova sila $\vec{F} = m_e \vec{a} = j \omega m_e \vec{v} = Q_e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0)$ Faradayevo sukanje

Preprosta rešitev $\vec{1}_K = \frac{\vec{1}_V \pm j \vec{1}_H}{\sqrt{2}}$

$\vec{v} = \vec{1}_K v_0 e^{-j\beta z} \quad \vec{E} = \vec{1}_K E_0 e^{-j\beta z}$

$\vec{1}_K \times \vec{1}_z = \frac{-\vec{1}_H \pm j \vec{1}_V}{\sqrt{2}} = j \frac{j \vec{1}_H \pm \vec{1}_V}{\sqrt{2}} = \pm j \vec{1}_K$

$j \omega m_e \vec{v} = Q_e (\vec{E} \pm j B_0 \vec{v}) \rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{E}}{\frac{j \omega m_e}{Q_e} \mp j B_0}$

Enosmerni $\vec{B}_0 = \vec{1}_z B_0$

$\omega_p^2 = \frac{N_e Q_e^2}{\epsilon_0 m_e}$

$\omega_g = \frac{-Q_e B_0}{m_e}$

$\epsilon_r = 1 + \frac{N_e Q_e}{j \omega \epsilon_0 \left(\frac{j \omega m_e}{Q_e} \mp j B_0 \right)} = 1 - \frac{N_e Q_e^2}{\omega^2 \epsilon_0 m_e \left(1 \mp \frac{Q_e B_0}{\omega m_e} \right)} = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \frac{1}{1 \pm \frac{\omega_g}{\omega}}$

$\omega \gg \omega_p, \omega_g$

$n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \frac{1}{1 \pm \frac{\omega_g}{\omega}}}$

$n \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \frac{1}{1 \pm \frac{\omega_g}{\omega}} \quad \Delta n = n_L - n_D \approx \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \frac{\omega_g}{\omega}$

$\Delta \phi = \int_s \Delta n(s) k_0 ds \approx \frac{\omega}{c_0} \int_s \left(\frac{\omega_p(s)}{\omega} \right)^2 \frac{\omega_g}{\omega} ds = \frac{\omega_g}{c_0} \int_s \frac{N_e(s) Q_e^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2} ds = \frac{Q_e^2 f_g TEC}{2 \pi c_0 \epsilon_0 m_e f^2}$

$TEC \approx 10^{18} \text{ m}^{-2} \quad f_g \approx 1.4 \text{ MHz} \quad f = 1 \text{ GHz} \rightarrow \Delta \phi \approx 0.752 \text{ rd}$

* * * * *