Univerza *v Ljubljani*
Fakulteta *za elektrotehniko*

ELEKTRODINAMIKA

Založba
FE

MATJAŽ VIDMAR

Elektrodinamika

Matjaž Vidmar

Ljubljana, 2020

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani
COBISS.SI-ID=304546048
ISBN 978-961-243-399-4 (pdf)

URL: http://antena.fe.uni-lj.si/literatura/ed.pdf

Recenzenta: prof. dr. Janez Trontelj, prof. dr. Janez Krč
Založnik: Založba FE, Ljubljana
Izdajatelj: Fakuleta za elektrotehniko, Ljubljana
Urednik: prof. dr. Sašo Tomažič
1. elektronska izdaja

Vsebina

1. Uvod v elektrodinamiko	strani 1.1-4
2. Telegrafska enačba	strani 2.1-9
3. Odboj in zvonjenje	strani 3.1-11
4. Frekvenčni prostor in kazalci	strani 4.1-12
5. Smithov diagram	strani 5.1-12
6. Vektorji in koordinatni sistemi	strani 6.1-14
7. Odvajanje skalarnih in vektorskih funkcij	strani 7.1-8
8. Maxwellove enačbe	strani 8.1-8
9. Vektorski potencial	strani 9.1-8
10. Poyntingov izrek	strani 10.1-6
11. Elektromagnetno sevanje	strani 11.1-9
12. Preproste antene	strani 12.1-11
13. Ravninski val	strani 13.1-12
14. Votlinski rezonator	strani 14.1-11
15. Kovinski valovod	strani 15.1-16
16. Valovanje v izgubni snovi	strani 16.1-13
17. Trakasti vodi	strani 17.1-11

Zahvala

Od zamisli do izvedbe predmeta na univerzitetnem študiju je dolga pot. Kaj je pomembno povedati študentom, kaj se sploh uspe predavati v omejenem številu ur enega semestra in kaj se da preveriti na laboratorijskih vajah? Iz predavanj najprej nastanejo zapiski, nato zvočni in video posnetki, na koncu je pa nujno vse skupaj zbrati, prečistiti in urediti v spodoben učbenik.

Pisanja učbenika Elektrodinamika sem se lotil po štirih letih predavanj istoimenskega predmeta, ki naj bi zapolnil vrzel predmetov Elektromagnetika in Valovanja starega študija. Za pomoč sem se najprej obrnil na dva študenta, Tadejo Saje in Jerneja Sorto, z vprašanjem, kaj je sploh v učbeniku primerno razloženo, kaj je nerazumljivo in kaj manjka. Čeprav je predmet Elektrodinamika smiselno nadaljevanje Osnov elektrotehnike, zajeten del učbenika vsebuje osvežitev potrebnega predznanja Matematike, Fizike in Osnov elektrotehnike.

Poglavja nastajajočega učbenika je nato večkrat natančno pregledal sodelavec Anton Rafael Sinigoj z vso matematično strogostjo. Poleg odkrivanja zahrbtnih napak mi je Anton Rafael Sinigoj marsikje svetoval, kako dopolniti razlago, kakšne izraze uporabljati in kako razložiti pomembne podrobnosti.

Končno ostanejo preproste tipkarske napake, ki jih nihče od nas ne vidi. Te lahko odkrijem edino tako, da za vsako najdeno napako študente nagradim z višjo oceno na izpitu.

Velika prednost učbenika v elektronski obliki je v temu, da se ga lahko stalno popravlja, dopolnjuje in nadgrajuje v skladu z razvojem predmeta. Torej študentje dobijo najboljše, kar je tisti trenutek na razpolago. Nenazadnje elektronska oblika omogoča kakovostne barvne risbe v vektorski obliki, kar omogoča iskanje ključnih besed tudi v risbah.

* * * * *

1. Uvod v elektrodinamiko

Vse do 19. stoletja fizika ni poznala povezav med navidez različnimi električnimi pojavi, magnetnimi pojavi in svetlobo. André-Marie Ampère (1826) in Michael Faraday (1831) sta odkrila povezavi med električnimi in magnetnimi pojavi v obe smeri. James Clerk Maxwell (1861) je vse dotedanje znanje o elektriki in magnetiki združil v slovite enačbe, ki danes nosijo njegovo ime. Maxwell je iz svojih enačb napovedal tudi elektromagnetno valovanje oziroma povezavo med električnimi in magnetnimi pojavi ter svetlobo, kar je Heinrich Rudolf Hertz potrdil s poskusi leta 1889.

Z odkritjem novih pojavov so se pojavila tudi nova vprašanja. Kaj poganja električno polje? Kaj poganja magnetno polje? Po kakšni snovi potuje elektromagnetno valovanje? Delce, ki poganjajo polja in skrivnostno snov, poimenovano »eter«, po kateri potuje elektromagnetno valovanje, so iskali številni znanstveniki. Albert Abraham Michelson je v iskanju skrivnostne snovi napravil številne poskuse. Najbolj znan je njegov poskus z interferometrom iz leta 1887, ki je bil zadosti natančen, da je dokazal, da skrivnostni »eter« ne obstaja. Danes ta poskus velja kot najbolj znan »neuspeli« poskus v fiziki, ki je v resnici sprožil razvoj teorije relativnosti.

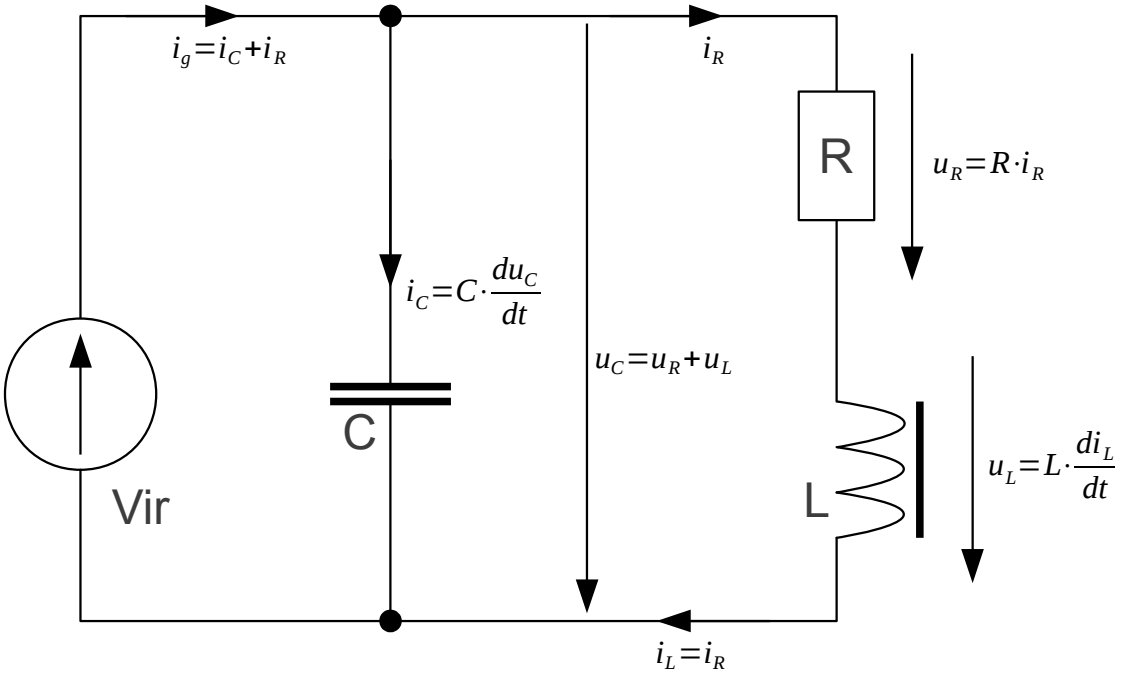
Dokončno je vse tri pojave razložil Albert Einstein v posebni teoriji relativnosti (1905). Električna sila je ena od štirih osnovnih fizikalnih sil, ki nastane med dvema elektrinama (električnima nabojema) tudi v popolnoma praznem prostoru (vakuumu), je premo sorazmerna velikosti obeh nabojev in obratno sorazmerna kvadratu razdalje. Relativistika z zahtevo po končni hitrosti svetlobe razloži še dva pojava. Gibajoče elektrine ustvarjajo magnetno polje, kar nakazujejo že relativistični skrčki dolžin (Hendrik Lorentz 1892). Pospešene elektrine sevajo elektromagnetno valovanje. Podobne zakonitosti veljajo tudi za težnost, kjer mase nadomeščajo elektrine.

Inženirji elektrotehnike skušamo zahtevno relativistiko v primeru električne sile poenostaviti. Ko so pojavi počasni in razdalje majhne, so zakasnitve zaradi končne hitrosti svetlobe nepomembne. Opazimo le električne in magnetne pojave. Sevanje elektromagnetnega valovanja smemo tedaj zanemariti.

Ker je hitrost gibanja elektrin običajno zelo majhna v primerjavi s hitrostjo svetlobe, so magnetne sile zelo majhne v primerjavi z električnimi. Magnetne pojave opazimo samo zato, ker se velika večina električnega polja premikajočih elektrin v prevodniku (gibljivi elektroni v kovini) odšteje od polja nepremičnih elektrin obratnega predznaka (kristalna mreža kovine). Magnetni

pojavi so tista majhna sprememba polja gibajočih elektrin, ki jo zahteva relativistika.

Počasni pojavi in majhne razdalje omogočajo opis poenostavljene naloge s preprostimi (koncentriranimi) gradniki vezja: električne pojave skrčimo v kondenzator, magnetne pojave skrčimo v tuljavo itd. Izmere gradnikov in razdalje med njimi v takšni poenostavljeni nalogi nimajo pomena. Končno nalogo rešujemo z načrtovanjem električnega vezja z znanimi gradniki:



Električno vezje je naloga brez prostorskih dimenzij.

Električno vezje je v resnici naloga z nič dimenzijami, saj izmere gradnikov in razdalje med njimi ne igrajo vloge. Povezave med napetostmi in tokovi v električnem vezju opisuje peščica preprostih enačb. Lep del elektrotehničnih nalog lahko opišemo in rešimo z električnimi vezji, kar predstavlja pomembno poenostavitev glede na izvorne Maxwellove enačbe.

Žal električna vezja niso povsod uporabna. Nekatere naloge zahtevajo za svoj opis neskončno število gradnikov. Nekaterih električnih nalog sploh ne moremo opisati z vezjem z nič dimenzijami. Na primer, kako opisati gretje črnega mačka na zimskem Soncu, kar je v vseh pogledih prava električna naloga?

Električno vezje nam ne zadošča v dveh primerih: ko so izmere naloge

velike oziroma ko so pojavi hitri, torej je frekvenca izmeničnih električnih veličin zelo visoka. Z drugimi besedami, primerjati moramo izmere naprave z valovno dolžino elektromagnetnega valovanja.

Ko so izmere naprave zelo majhne v primerjavi z valovno dolžino, zadošča opis naprave z vezjem z nič dimenzijami. Ko so izmere naprave primerljive z valovno dolžino, potrebujemo drugačen pristop in s tem se ukvarja elektrodinamika. Končno, optika nam opisuje zelo velike naprave v primerjavi z valovno dolžino, kar je spet poenostavitev splošne elektrodinamike.

Kje potrebujemo zahtevnejši opis elektrodinamike? Pri načrtovanju elektronskega mikročipa vse do frekvenc nekaj GHz zagotovo ne. Izmere čipa so majhne, tam so velika električna polja, torej gre vse v okviru elektrostatike. Tokovi v čipu so lahko veliki, ampak površine zank so majhne, magnetni pretoki so majhni in indukcijo lahko zanemarimo. Če mikročip ne vsebuje svetlobnih gradnikov (fotodiod, svetlečih diod oziroma polprevodniških laserjev), je sevanje elektromagnetnega valovanja zanemarljivo.

Zahtevnejši opis zagotovo potrebujemo v telekomunikacijah. Razdalje so velike, saj želimo komunikacije na velike razdalje. Visoko zmogljivost zveze omogoča edino velika pasovna širina, torej visoke frekvence. Elektrodinamika postane najprej pomembna prav s telegrafsko enačbo (Oliver Heaviside 1880). Mikročipi postajajo čedalje hitrejši, da že povezave med njimi zahtevajo poznavanje elektrodinamike. Kljub nizki frekvenci komaj 50Hz so postala danes elektroenergetska omrežja tako velika, da potrebujemo elektrodinamiko celo v energetiki.

Kako opisati elektrodinamiko na čimbolj preprost, ampak uporaben način, ki daje zadovoljivo natančnost rezultatov? Naloge z eno veliko izmero, to se pravi eno-dimenzijske naloge, lahko opišemo s porazdeljenimi gradniki, torej z vezji z neskončnim številom gradnikov. Kljub izhodišču iz preprostih osnov elektrotehnike in izogibanju relativistiki, rešitve nalog takoj pokažejo na ključno veličino, to je hitrost elektromagnetnega valovanja (svetlobe).

Tri-dimenzijske naloge potrebujejo zahtevnejši pristop. Elektrotehnikom so Maxwellove enačbe vsekakor preprostejše za razumevanje od zahtevne relativistike. Maxwellove enačbe je treba pretvoriti v diferencialno obliko, da postane naloga zadosti majhna, torej diferencialno majhna. V diferencialno majhni nalogi so zakasnitve diferencialno majhne, torej relativistika ne nagaja. Tu žal brez zahtevne matematike, diferencialne geometrije v različnih tri-dimenzijskih koordinatnih sistemih v prostoru ne gre.

V elektrodinamiki lahko energija potuje tudi v povsem praznem

prostoru. Gostoto pretoka moči nam opisuje Poyntingov vektor. Rešitev parcialne diferencialne valovne enačbe za električno oziroma magnetno polje ni preprosta. Pojav sevanja, ki je osnova brezvrvičnih zvez, najlažje izpeljemo z uvedbo nove vmesne veličine, vektorskega potenciala.

Točna obravnava ravninskega elektromagnetnega valovanja v elektrodinamiki nam preprosto opiše odboj, lom in tuneliranje valovanja na mejah različnih snovi. Vsota več različnih ravninskih valov nam omogoča opis novih naprav, kot sta kovinski valovod oziroma votlinski rezonator. Točna obravnava elektromagnetnega polja v izgubni snovi nam razloži kožni pojav v kovinah pri visokih frekvencah, ki spreminja porazdelitev toka po preseku kovinskega vodnika in povečuje izgube.

Ta učbenik skuša odgovoriti na izziv, kako poučevati elektrodinamiko na sodoben način, izpustiti manj pomembna področja in dodati vse tisto, kar uporablja sodobna telekomunikacijska tehnika. Kljub temu, da so izpeljave v tem učbeniku skrčene na najmanjšo možno mero, elektrodinamika še vedno zahteva dobro poznavanje matematike in osnov elektrotehnike. Kjer je le možno, je poleg poštene a zahtevne rešitve Maxwellovih enačb navedena tudi preprosta razlaga pojavov s pojmi električnih vezij.

Elektrodinamika je osnova za razumevanje delovanja gradnikov terminalne opreme, sprejemnikov in oddajnikov ter vseh prenosnih poti v telekomunikacijah, tako brezvrvičnih radijskih in svetlobnih zvez kot vrvičnih zvez po kovinskih vodnikih in steklenih (ali dielektričnih) svetlobnih vlaknih.

* * * * *

2. Telegrafska enačba

Električni telegraf je plod dela številnih izumiteljev v prvi polovici 19. stoletja. Uporabnost telegrafa je neposredno vezana na njegov domet. V drugi polovici 19. stoletja so inženirji dosegli prekooceanske razdalje. Prvi prekooceanski kabel iz Evrope v Ameriko je bil položen že leta 1857. Žal je zaradi tehnološke nedovršenosti izolacije deloval le nekaj tednov. Tehnologija izolacije pa ni edina težava pri prekooceanskih razdaljah.

Na tako velikih razdaljah opazimo pojave elektrodinamike že pri zelo nizkih prenosnih hitrostih Morsejeve telegrafije z ročno oddajo in sprejemom na sluh, torej pri pasovni širini komaj 10Hz. Upornost žice ni edini niti najpomembnejši podatek telegrafskega kabla. Nadomestno vezje prenosne poti ni preprosto in takratni inženirji so prvo, eno-dimenzijsko nalogo elektrodinamike opisali z imenom telegrafska enačba.

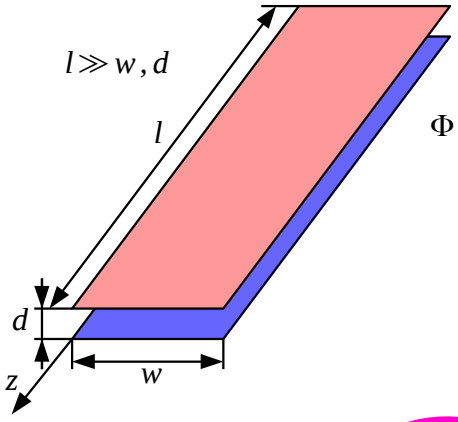
Prenosni vodi ostajajo zelo pomembno področje elektrodinamike tudi danes. Dogovor velja, da v eno-dimenzijskih nalogah opisuje veliko izmero, kjer opazimo pojave elektrodinamike, koordinata z oziroma dolžina voda l. Prečne izmere prenosnih vodov so v številnih praktičnih primerih zadosti majhne, da jih lahko obravnavamo z gradniki električnih vezij.

Dva preprosta, silno uporabna in vsakdanja zgleda iz osnov elektrotehnike sta trakasti dvovod in koaksialni kabel. Preprosta zgleda sta izbrana z namenom, da se tu ne ukvarjamo s kompliciranim izračunom elektromagnetnega polja, kapacitivnosti in induktivnosti, pač pa že znani rezultat iz osnov elektrotehnike uporabimo v elektrodinamiki. Simetrični žični dvovod (parica) je prav tako uporaben vsakdanji zgled, le da so točni izrazi za kapacitivnost in induktivnost že malo bolj zahtevni.

Trakasti dvovod sestavljata dva kovinska vodnika v obliki trakov širine w, debeline s in dolžine l. Trakova sta razmaknjena za d v praznem prostoru. Trakova tvorita kondenzator s ploščama površine $w \times l$ na medsebojni razdalji d. Ista dva trakova tvorita tuljavo z enim samim ovojem s presekom jedra $d \times l$ in dolžino tuljave w.

Ko velja $w \gg d$, je večina električnega in magnetnega polja v reži med trakovoma. Debelina trakov s postane nepomembna. Stresano električno in magnetno polje drugod po prostoru lahko zanemarimo oziroma opišemo z navideznim povečanjem w, to se pravi, s popravkom širine trakov. Izraza za kapacitivnost in induktivnost trakastega dvovoda se tedaj

silno poenostavita:



$$\Phi = \iint \mu_0 \vec{H} \cdot d\vec{A} = \mu_0 i \frac{d \cdot l}{w}$$

$$L = \frac{\Phi}{i} = \mu_0 \frac{d \cdot l}{w}$$

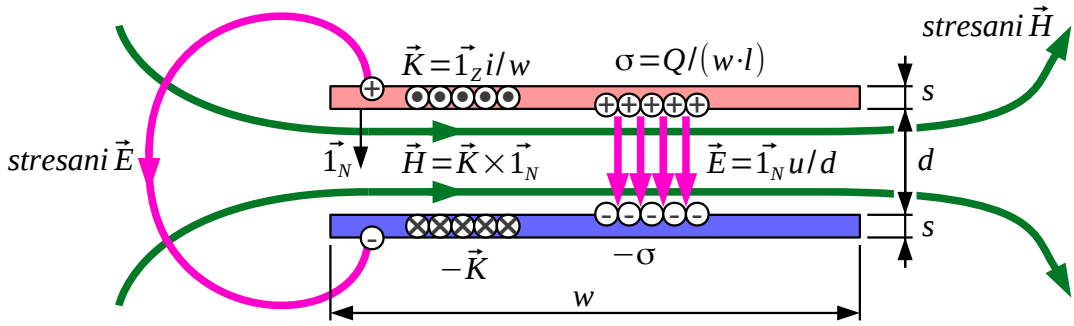
$$L/l \approx \mu_0 \frac{d}{w}$$

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{1}_N = \epsilon_0 \frac{u}{d}$$

$$Q = \iint \sigma \, dA = \epsilon_0 u \frac{w \cdot l}{d}$$

$$C = \frac{Q}{u} = \epsilon_0 \frac{w \cdot l}{d}$$

$$C/l \approx \epsilon_0 \frac{w}{d}$$



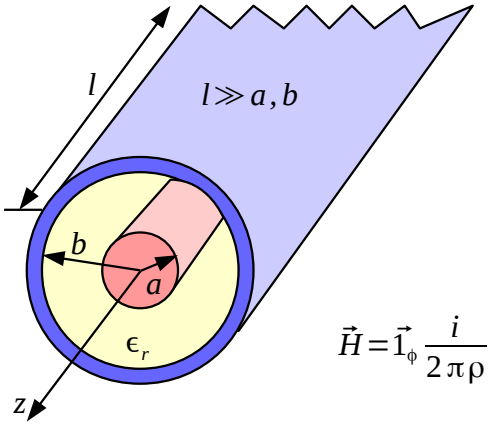
$w \gg d \rightarrow$ *stresanje zanemarljivo*

Trakasti dvovod

Poleg telegrafske enačbe je Oliver Heaviside izumil tudi koaksialni kabel. Koaksialni kabel sestavljajo kovinska žila s polmerom a, izolacija z relativno dielektričnostjo ϵ_r in kovinski oklop z notranjim polmerom b. Kapacitivnost koaksialnega kabla izračunamo s pomočjo električnega polja preme elektrine. Slednje upada kot $1/\rho$, kjer je ρ oddaljenost od osi kabla. Integracija električnega polja daje logaritem razmerja polmerov, ki nastopa v imenovalcu kapacitivnosti.

Enosmerni tok je razporejen po celotnem preseku vodnikov. Enosmerno magnetno polje koaksialnega kabla se pojavi v notranjosti obeh vodnikov in v dielektriku med njima. Zunaj koaksialnega kabla ni nobenega polja, niti električnega niti magnetnega, če se tok v žili v celoti vrača nazaj po oklopu.

V telekomunikacijah uporabljamo koaksialni kabel na tako visokih frekvencah, da je tok razporejen samo po tanki koži debeline komaj nekaj mikrometrov $\delta \ll a, b$ po površinah vodnikov: po površini žile in po notranji površini oklopa. Magnetno polje v notranjosti vodnikov je tedaj zanemarljivo. Magnetno polje v dielektriku upada kot $1/\rho$, integracija daje logaritem razmerja polmerov, ki nastopa v izrazu za induktivnost:



$$\vec{E}=\vec{1}_\rho \frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r\rho}$$

$$C=\frac{q\cdot l}{u}=\frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$u=-\int_b^a \vec{E}\cdot\vec{ds}=\frac{q}{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

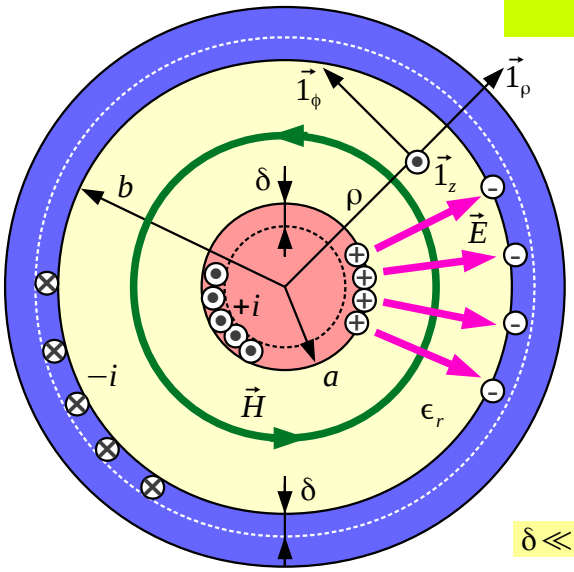
$$C/l=\frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\vec{H}=\vec{1}_\phi \frac{i}{2\pi\rho}$$

$$\Phi=\iint \mu_0\vec{H}\cdot\vec{dA}=\frac{\mu_0 i l}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$L=\frac{\Phi}{i}=\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$L/l=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

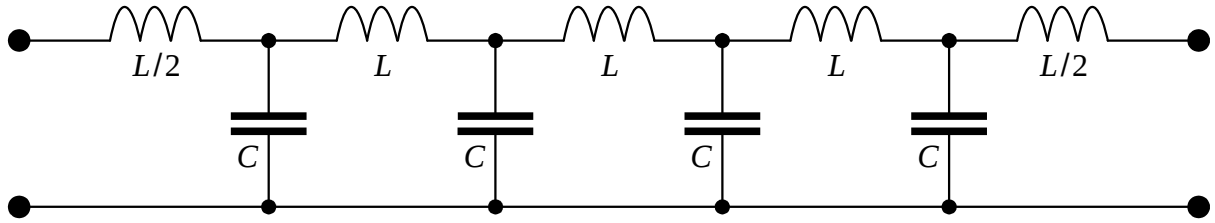


$$\delta \ll a, b$$

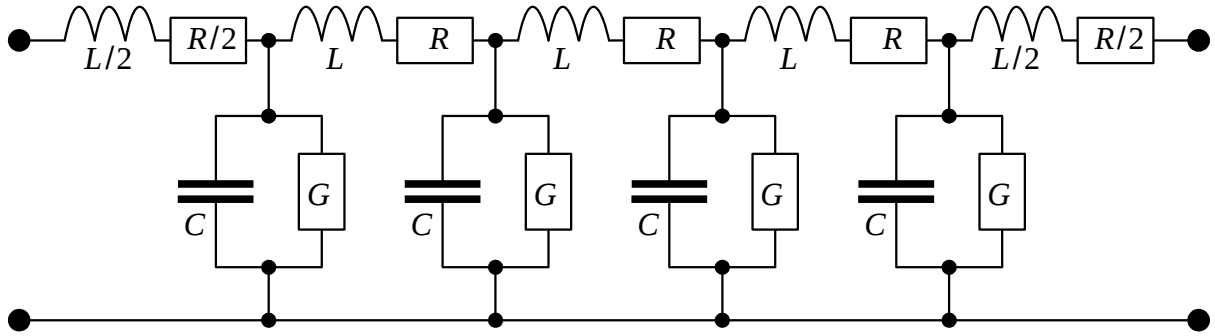
Koaksialni kabel

Induktivnost in kapacitivnost prenosnega voda, kot sta trakasti dvovod in koaksialni kabel, sta porazdeljeni veličini po dolžini voda l . Električno nadomestno vezje daljšega voda mora torej vsebovati večje število zaporednih tuljav L in pripadajoče število vzporednih kondenzatorjev C . Za čimbolj natančen opis razdelimo eno od zaporednih tuljav na polovico, da nastopa $L/2$ na začetku in na koncu verige.

Natančnejši opis prenosnega voda vsebuje tudi izgube v kovinskih vodnikih in v dielektriku med njima. Izgube v kovinskih vodnikih se kažejo kot upor upornosti R , ki je vezan zaporedno tuljavi induktivnosti L . Izgube v dielektriku ponazorimo na preprost način z uporom prevodnosti G , ki je vezan vzporedno h kondenzatorju kapacitivnosti C . Nadomestni vezji poenostavljenega voda brez izgub in natančnejši opis voda z izgubami sta prikazana na spodnji sliki:



Nadomestno vezje brezizgubnega voda

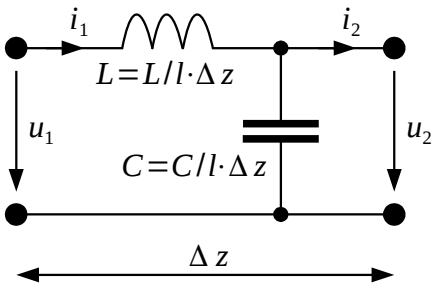


Nadomestno vezje voda z izgubami

Vsak elektrotehnik bo v takšnih vezjih prepoznal nizkoprepustno frekvenčno sito. Tu je z nadomestnim vezjem nekaj narobe, ker se resnični prenosni vodi nikakor ne obnašajo kot nizkoprepustna sita! Zaporna frekvenca navideznega sita sicer narašča z natančnostjo opisa, torej z višanjem števila nadomestnih tuljav in kondenzatorjev.

Računska zahtevnost reševanja električnega vezja je sorazmerna kubu (tretji potenci) števila vozlišč oziroma zank vezja, torej natančnejši opis z večjim številom tuljav in kondenzatorjev praktično ni uporaben. Za rešitev naloge je smiseln drugačen pristop, ki ga opisuje telegrafska enačba:

Telegrafska enačba za brezizgubni vod



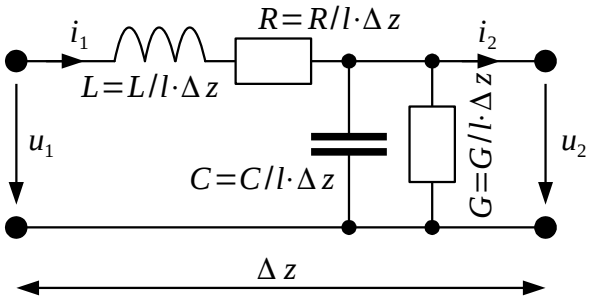
$$\Delta u=u_2-u_1=-L\cdot\frac{di_1}{dt}$$

$$\Delta i=i_2-i_1=-C\cdot\frac{du_2}{dt}$$

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}=-L/l\cdot\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}=-C/l\cdot\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}$$

Telegrafska enačba za vod z izgubami



$$\Delta u=u_2-u_1=-L\cdot\frac{di_1}{dt}-R\cdot i_1$$

$$\Delta i=i_2-i_1=-C\cdot\frac{du_2}{dt}-G\cdot u_2$$

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}=-L/l\cdot\frac{\partial i(z,t)}{\partial t}-R/l\cdot i(z,t)$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}=-C/l\cdot\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}-G/l\cdot u(z,t)$$

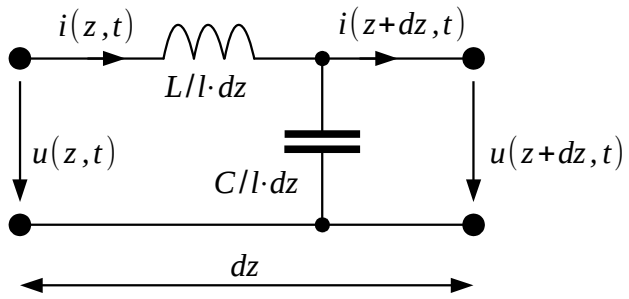
Napaka pri izračunu bo tem manjša, čim krajše odseke prenosnega voda Δz opisujemo s koncentriranimi gradniki: tuljavami in kondenzatorji. Če končno dolžino odseka Δz nadomestimo z diferencialno majhno dolžino odseka dz, opisujeta dogajanje v nadomestnem vezju dve sklopljeni parcialni diferencialni enačbi za napetost $u(z,t)$ in tok $i(z,t)$ s skupnim imenom telegrafska enačba.

V resničnem prenosnem vodu moramo upoštevati tudi izgube. Kovinski vodniki dodajajo od nič različno zaporedno upornost R. Nebrezhibna izolacija dodaja vzporedno prevodnost G. V resničnem vodu oba nista preprosti konstanti, pač pa sta komplicirani funkciji. Oba je lažje zapisati v frekvenčnem prostoru kot $R(\omega)$ in $G(\omega)$, zato se na opis dogajanja v vodu z izgubami vrnemo kasneje v frekvenčnem prostoru.

Prenosne vode sicer skušamo izdelati tako, da so izgube majhne. V tem primeru nam daje tudi telegrafska enačba za brezizgubni vod razmeroma dober vpogled v dogajanje na prenosnem vodu. Sklopljeni diferencialni enačbi poskusimo rešiti tako, da z dodatnim odvajanjem prve enačbe po položaju z oziroma druge enačbe po času t izločimo eno od neznank, na primer tok $i(z,t)$ in pri tem privzamemo, da matematično dovolj pohlevne funkcije dopuščajo zamenjavo vrstnega reda odvajanja:

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z}=-L/l\cdot\frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \Big/ \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial i(z,t)}{\partial z}=-C/l\cdot\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} \Big/ \frac{\partial}{\partial t}$$



$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}=-L/l\cdot\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z\,\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z\,\partial t}=-C/l\cdot\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}=L/l\cdot C/l\cdot\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}$$

Rešitev telegrafske enačbe

$$u(z,t)=u_N\left(t-\frac{z}{v}\right)+u_O\left(t+\frac{z}{v}\right)$$

Napredujoči val

Odbiti (povratni) val

$$u(z,t)=u\left(t\pm\frac{z}{v}\right)$$

$$v=\frac{1}{\sqrt{L/l\cdot C/l}}$$

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}=u''\left(t\pm\frac{z}{v}\right)\cdot\frac{1}{v^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}=u''\left(t\pm\frac{z}{v}\right)$$

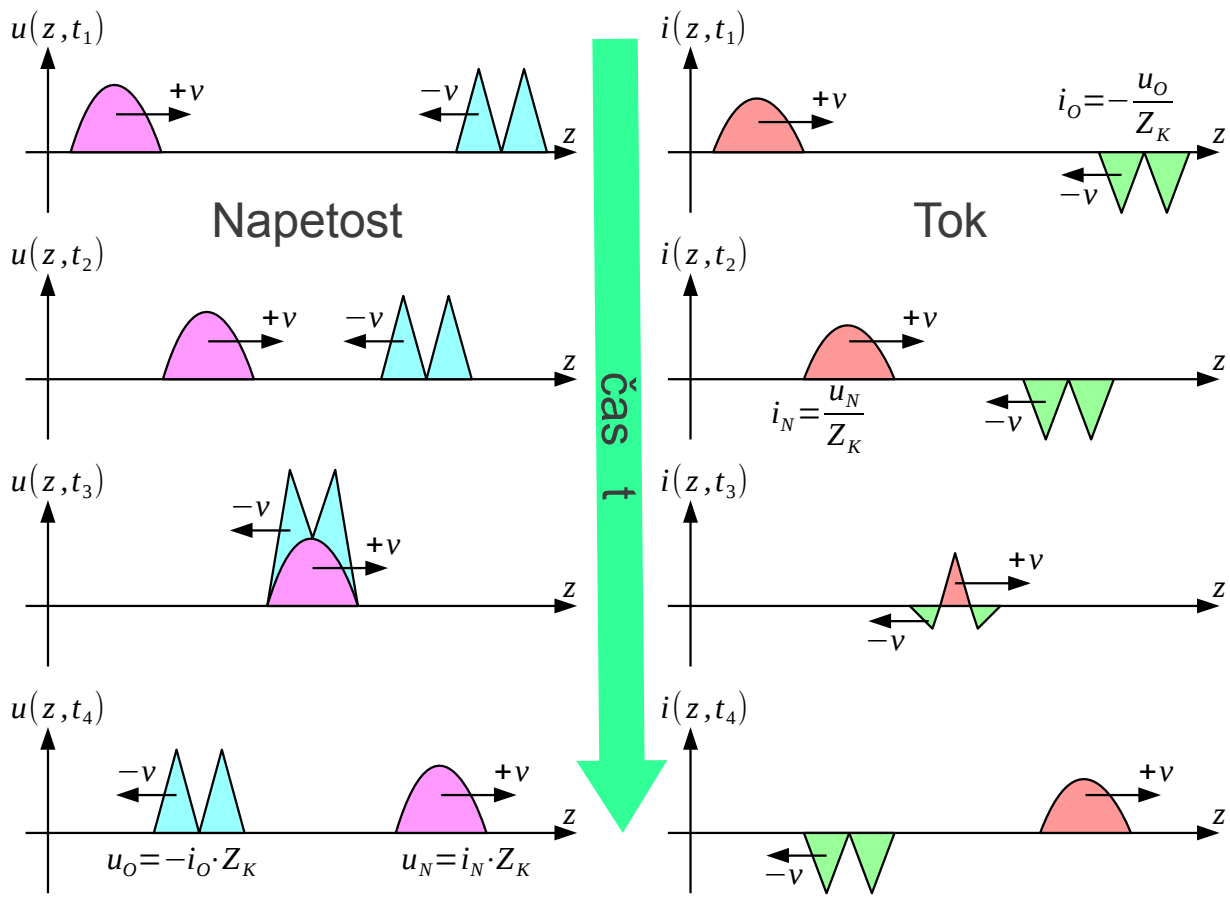
Ostane nam ena sama parcialna diferencialna enačba za napetost $u(z,t)$. V enačbi je razvidno, da se dvojna odvoda po položaju z oziroma po času t razlikujeta samo v množilni konstanti! Rešitev $u(z,t)$ je torej lahko poljubna funkcija enega samega argumenta $t\pm z/v$, primerno utežene vsote oziroma razlike časa t in položaja z.

Odvod funkcije enega argumenta označimo s črtico. Drugi odvod z dvema črticama. Po pravilu za odvajanje moramo rezultat pomnožiti še z odvodom argumenta $t\pm z/v$ po z oziroma t pripadajočega reda.

Povezavo med časom in položajem daje hitrost v, s katero se funkcija premika naprej oziroma nazaj po osi z. Rešitev z razliko imenujemo tudi napredujoči (vpadni) val in se z naraščajočim časom t premika naprej po osi z. Rešitev z vsoto imenujemo odbiti (povratni) val in se z naraščajočim časom t premika nazaj po osi z.

Diferencialna enačba drugega reda zahteva dve popolnoma neodvisni rešitvi, napredujoči in odbiti val. Vsaka rešitev za napetost $u(z,t)$ ima pripadajočo rešitev za tok $i(z,t)$. Primer rešitve telegrafske enačbe je prikazan spodaj kot časovno zaporedje slikic. Zgleda za napredujoči in odbiti

val napetosti $u(z,t)$ in toka $i(z,t)$ sta namenoma prostorsko omejena in prikazana v različnih barvah:



Povezava med tokom in napetostjo napredujočega ali odbitega vala je preprosta množilna konstanta in jo imenujemo karakteristična upornost voda R_K. Dobimo jo z izračunom odvodov v eni od izvornih sklopljenih enačb. Najprej izračunamo odvod funkcije enega argumenta $t \pm z/v$, nato odvajamo še argument $t \pm z/v$ po z oziroma t. Pomembna razlika med napredujočim in odbitim valom je v predznaku množilne konstante, ki povezuje rešitvi za napetost $u(z,t)$ in tok $i(z,t)$.

Pojem karakteristične upornosti R_K v časovnem prostoru razširimo na pojem karakteristične impedance Z_K v frekvenčnem prostoru. Karakteristična impedanca Z_K brezizgubnega voda je povsem realno število in ustreza karakteristični upornosti R_K v časovnem prostoru. Zato pogosto uporabljamo izraz karakteristična impedanca Z_K tudi v časovnem prostoru, čeprav strogo gledano impedanca v časovnem prostoru ne obstaja.

Rezultat računa je razmerje med odvodom funkcije napetosti u' po argumentu $t \pm z/v$ in odvodom funkcije toka i' po istem argumentu

$t \pm z/v$. V elektrodinamiki nas enosmerne konstante ne zanimajo, torej velja isto razmerje tudi med napetostjo u in tokom i :

Karakteristična upornost

$$\frac{\partial}{\partial z} u\left(t \pm \frac{z}{v}\right) = -L/l \frac{\partial}{\partial t} i\left(t \pm \frac{z}{v}\right) \qquad \frac{u'}{i'} = \mp v \cdot L/l = \mp \sqrt{\frac{L/l}{C/l}} = \mp R_K = \frac{u}{i}$$

$$\pm \frac{1}{v} u'\left(t \pm \frac{z}{v}\right) = -L/l \cdot i'\left(t \pm \frac{z}{v}\right) \qquad R_K = \sqrt{\frac{L/l}{C/l}} = \frac{u_N}{i_N} = -\frac{u_O}{i_O} \qquad i(z,t) = \frac{u_N}{R_K}\left(t - \frac{z}{v}\right) - \frac{u_O}{R_K}\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

Trakasti dvovod

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \frac{d}{w} \cdot \epsilon_0 \frac{w}{d}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c_0 \approx 3 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}$$

$$R_K = \sqrt{\frac{\mu_0 \frac{d}{w}}{\epsilon_0 \frac{w}{d}}} = \frac{d}{w} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx \frac{d}{w} \cdot 377\,\Omega$$

Koaksialni kabel

$$v = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$R_K = \sqrt{\frac{\frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \approx \frac{60\,\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Pozor, razmerje med napetostjo in tokom napredujočega vala ima glede na naše oznake vrednost $+R_K$, razmerje med tokom in napetostjo odbitega vala pa vrednost $-R_K$. Napredujoči in odbiti val imata tudi vsak svojo, neodvisno moč in nosita vsak svojo, neodvisno energijo. V natančnem opisu v treh dimenzijah bi napredujoči in odbiti val na takšnih prenosnih vodih poimenovali kot dve neodvisni TEM (prečni elektro-magnetni) valovanji.

Valovanje na prenosnem vodu vsebuje električno in magnetno energijo $W = W_e + W_m$. Električno energijo na enoto dolžine določa napetost na vodu $W_e/l(z,t) = 1/2 \cdot C/l \cdot u^2(z,t)$. Magnetno energijo na enoto dolžine določa tok na vodu $W_m/l(z,t) = 1/2 \cdot L/l \cdot i^2(z,t)$.

Osamljen napredujoči val, na primer v trenutkih t_1 ali t_2 na časovnem zaporedju slikic, nosi povsem enako električno in magnetno energijo $W_e = W_m = 1/2 \cdot W_N$, kar zagotavlja povezava $u_N = R_K \cdot i_N$ med napetostjo in tokom napredujočega vala:

$$W_e/l=1/2\cdot C/l\cdot u_N^2=1/2\cdot C/l\cdot R_K^2\cdot i_N^2=1/2\cdot L/l\cdot i_N^2=W_m/l$$

Ista enakost velja za električno in magnetno energijo osamljenega odbitega vala $W_e=W_m=1/2\cdot W_O$, saj povezava $u_O=-R_K\cdot i_O$ med napetostjo in tokom odbitega vala ponovno prinaša $u_O^2=R_K^2\cdot i_O^2$.

Ko napredujoči in odbiti val soobstajata na istem delu prenosnega voda, na primer trčenje v trenutku t_3 na časovnem zaporedju slikic, električna in magnetna energija nista več enaki $W_e\neq W_m$! Ko imata napetosti napredujočega in odbitega vala isti predznak, se del magnetne energije pretvori v električno energijo. Obratno, ko imata napetosti napredujočega in odbitega vala različen predznak, se del električne energije pretvori v magnetno energijo.

Ko se napredujoči in odbiti val razideta v trenutku t_4 na časovnem zaporedju slikic, se energija pretvori nazaj v takšno obliko, da za osamljen napredujoči ali osamljen odbiti val ponovno velja $W_e=W_m=1/2\cdot W$.

Induktivnost na enoto dolžine L/l in kapacitivnost na enoto dolžine C/l prenosnega voda določata dve novi lastnosti voda: hitrost valovanja v in karakteristično upornost R_K . Hitrost valovanja v je enaka hitrosti svetlobe v snovi, ki je uporabljena kot izolator med vodnikoma TEM prenosnega voda. V primeru trakastega dvovoda je to prazen prostor, torej je hitrost valovanja $v=c_0$ enaka hitrosti svetlobe v praznem prostoru. Dielektrik koaksialnega kabla upočasnjuje svetlobo za faktor $\sqrt{\epsilon_r}$. V koaksialnem kablu s praznim prostorom kot dielektrikom velja $v=c_0$.

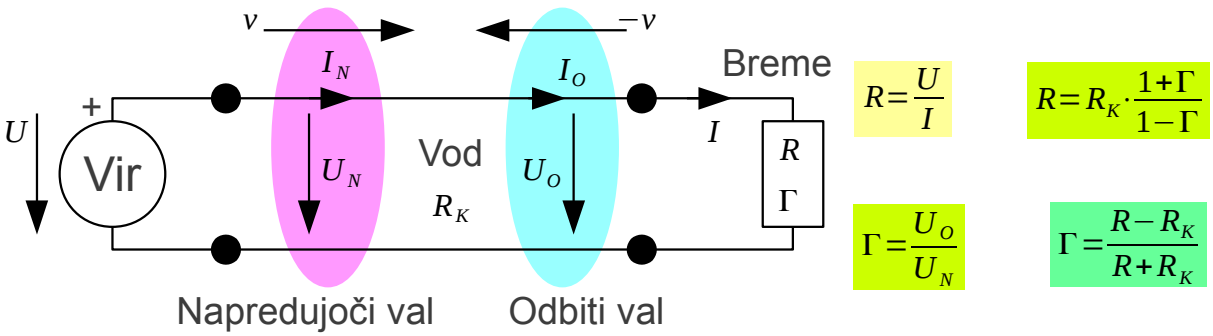
Točna geometrija TEM prenosnega voda, torej širina w in razmak trakov d trakastega dvovoda oziroma polmera žile a in oklopa b koaksialnega kabla, nima nobenega vpliva na hitrost valovanja v ! Prečni presek TEM prenosnega voda seveda določa karakteristično upornost R_K . V primeru trakastega dvovoda določa karakteristično upornost razmerje razmak/širina trakov d/w . V primeru koaksialnega kabla določata karakteristično upornost razmerje polmerov oklopa/žile b/a in dielektričnost ϵ_r med njima.

* * * * *

3. Odboj in zvonjenje

Rešitev telegrafske enačbe daje napetost $u(z,t)$ in tok $i(z,t)$ kot funkcijo položaja z na prenosnem vodu in časa t. Rešitev sestavljata napredujoči val in odbiti (povratni) val. Razmerje med napetostjo in tokom posameznih valov ni poljubno. Pri napredujočem valu znaša razmerje $+Z_K$, pri odbitem valu pa $-Z_K$. Brezizgubni prenosni vod v celoti opišemo z dvema podatkoma: hitrostjo valovanja v in karakteristično upornostjo R_K.

Prenosni vod napajamo na začetku z virom, na drugem koncu pa ga zaključimo z bremenom. Najprej si oglejmo najpreprostejši zgled! Uporabimo enosmerni napetostni vir z napetostjo U in počakamo, da kakršenkoli prehodni pojav izzveni. Breme je upor upornosti R, ki določa razmerje med napetostjo U in tokom I:

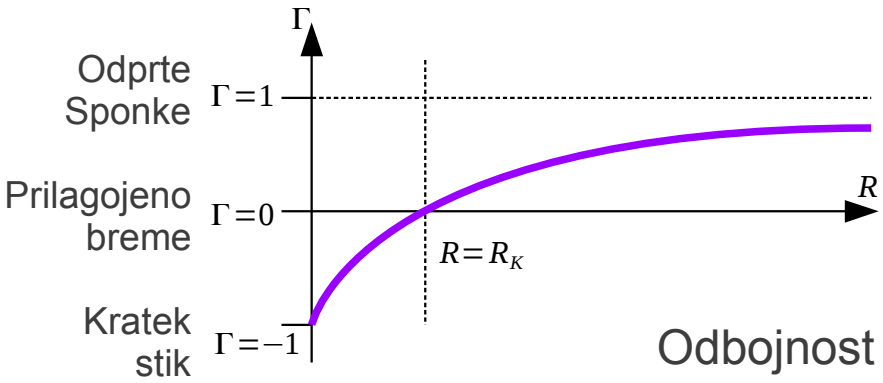


$$U=U_N+U_O \qquad I=I_N+I_O=\frac{U_N}{R_K}-\frac{U_O}{R_K} \longrightarrow U_N-U_O=I\cdot R_K=U\cdot\frac{R_K}{R}$$

$$U_N=\frac{1}{2}\cdot\left(U+U\cdot\frac{R_K}{R}\right)$$

$$U_O=\frac{1}{2}\cdot\left(U-U\cdot\frac{R_K}{R}\right)$$

$$\Gamma=\frac{U-U\cdot\frac{R_K}{R}}{U+U\cdot\frac{R_K}{R}}=\frac{R-R_K}{R+R_K}$$



Upornost R se v splošnem razlikuje od karakteristične upornosti voda R_K. Upor R torej vsiljuje drugačno razmerje med napetostjo U

in tokom I, kot to zahteva rešitev valovne enačbe za napredujoči val. Rešitev valovne enačbe za odbiti val zahteva negativno razmerje med napetostjo in tokom.

Zahtevano razmerje bremena upornosti R med napetostjo U in tokom I lahko dosežemo edino tako, da dopuščamo na prenosnem vodu hkrati obe rešitvi telegrafske enačbe za napredujoči val U_N, I_N in za odbiti val U_O, I_O. Razmerje med odbitim in napredujočim valom imenujemo odbojnost (bremena) Γ. V elektrotehniki odbojnost vedno definiramo kot razmerje napetosti $\Gamma = U_O / U_N$ oziroma električnih poljskih jakosti $\Gamma = E_O / E_N$. Pri zvočnem valovanju je odbojnost definirana kot razmerje amplitud tlakov, $\Gamma = p_O / p_N$.

Povsem jasno ima razmerje tokov $I_O / I_N = -\Gamma$ oziroma magnetnih poljskih jakosti $H_O / H_N = -\Gamma$ oziroma razmerje amplitud hitrosti delcev zvočnega valovanja $v_O / v_N = -\Gamma$ nasprotni predznak. Karakteristični upornosti $u/i = \pm R_K$ je enakovredna povezava med električno in magnetno poljsko jakostjo, valovna impedanca snovi $E/H = \pm Z = \pm\sqrt{\mu/\epsilon}$ oziroma med amplitudama tlaka in hitrosti delcev, zvočna valovna impedanca $p/v = \pm Z = \pm\sqrt{C \cdot \rho}$, kjer sta C modul elastičnosti in ρ gostota snovi.

Odbojnost Γ (ob dogovorjeni R_K voda) v celoti opisuje električno obnašanje bremena. Odbojnost Γ je dosti širši fizikalni pojem od električne upornosti R, saj je povsem točno določena tudi za elektromagnetna polja in številna druga valovanja v fiziki. Obstaja povsem jasna in enolična povezava: kako iz upornosti bremena R dobimo odbojnost Γ in obratno.

Odbojnost Γ je razmerje, torej neimenovano število. Uporaba odbojnosti Γ zahteva izbiro karakteristične upornosti R_K, ki ima v svetu električnih napetosti in tokov mersko enoto $[\Omega]$ (ohm). Na drugi strani ima odbojnost Γ marsikatero prednost pri računanju oziroma pri meritvah. Za breme $R \geq 0$ je velikost odbojnosti vedno manjša od ena, $|\Gamma| \leq 1$!

Odbojnost Γ je načeloma lažje meriti kot električno upornost R. Električno upornost R določimo tako, da izmerimo napetost U z voltmetrom in tok I z ampermetrom. Pri tem nam nagaja bodisi notranja upornost voltmetra, ki ne more biti neskončno velika, $R_V < \infty$, oziroma notranja upornost ampermetra, ki ne more biti neskončno majhna, $R_A > 0$.

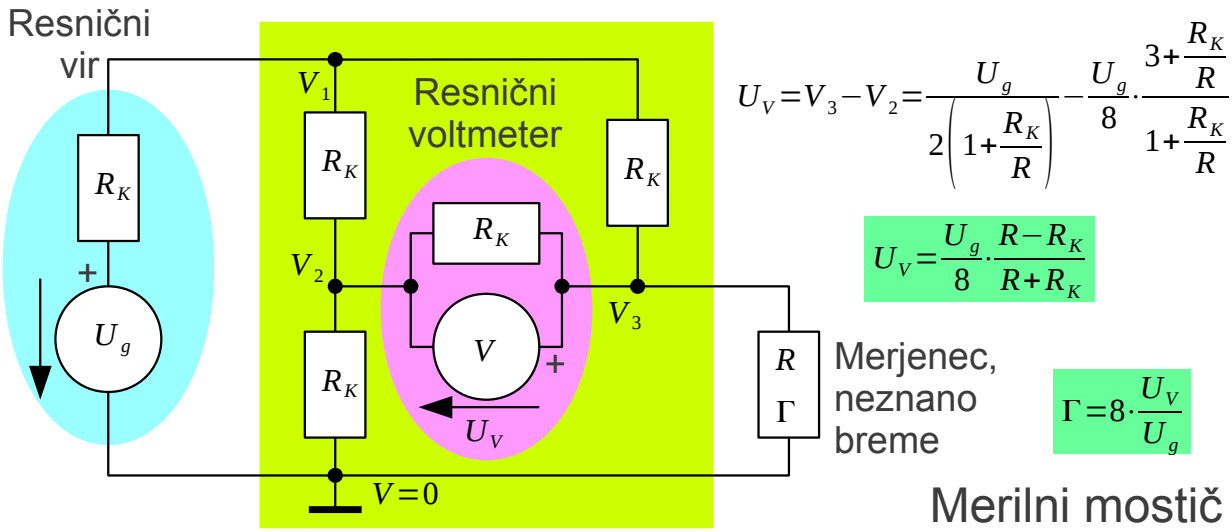
Odbojnost Γ lahko merimo na različne načine. Ena možna meritev

odbojnosti Γ v svetu električnih tokov in napetosti je z merilnim mostičem. Mostič napajamo z resničnim električnim virom, ki ima končno in preprosto določljivo vrednost svoje lastne notranje upornosti $R_g = R_K$. Kot merilnik napetosti uporabimo resnični voltmeter, ki ima končno in preprosto izvedljivo vrednost svoje lastne notranje upornosti $R_V = R_K$. Rešitev sistema enačb vozliščnih potencialov mostiča se v primeru $R_g = R_V = R_K$ poenostavi v:

1 $$\frac{V_1 - U_g}{R_K} + \frac{V_1 - V_2}{R_K} + \frac{V_1 - V_3}{R_K} = 0 \rightarrow 3V_1 = U_g + V_2 + V_3 \rightarrow 8V_2 = U_g + 4V_3 \rightarrow V_3 = \frac{U_g}{2\left(1 + \frac{R_K}{R}\right)}$$

2 $$\frac{V_2 - V_1}{R_K} + \frac{V_2 - V_3}{R_K} + \frac{V_2}{R_K} = 0 \rightarrow 3V_2 = V_1 + V_3 \rightarrow V_1 = 3V_2 - V_3$$

3 $$\frac{V_3 - V_2}{R_K} + \frac{V_3 - V_1}{R_K} + \frac{V_3}{R} = 0 \rightarrow \left(2 + \frac{R_K}{R}\right) V_3 = V_1 + V_2 \rightarrow \left(3 + \frac{R_K}{R}\right) V_3 = 4V_2 \rightarrow V_2 = \frac{U_g}{8} \cdot \frac{3 + \frac{R_K}{R}}{1 + \frac{R_K}{R}}$$



$$U_V = V_3 - V_2 = \frac{U_g}{2\left(1 + \frac{R_K}{R}\right)} - \frac{U_g}{8} \cdot \frac{3 + \frac{R_K}{R}}{1 + \frac{R_K}{R}}$$

$$U_V = \frac{U_g}{8} \cdot \frac{R - R_K}{R + R_K}$$

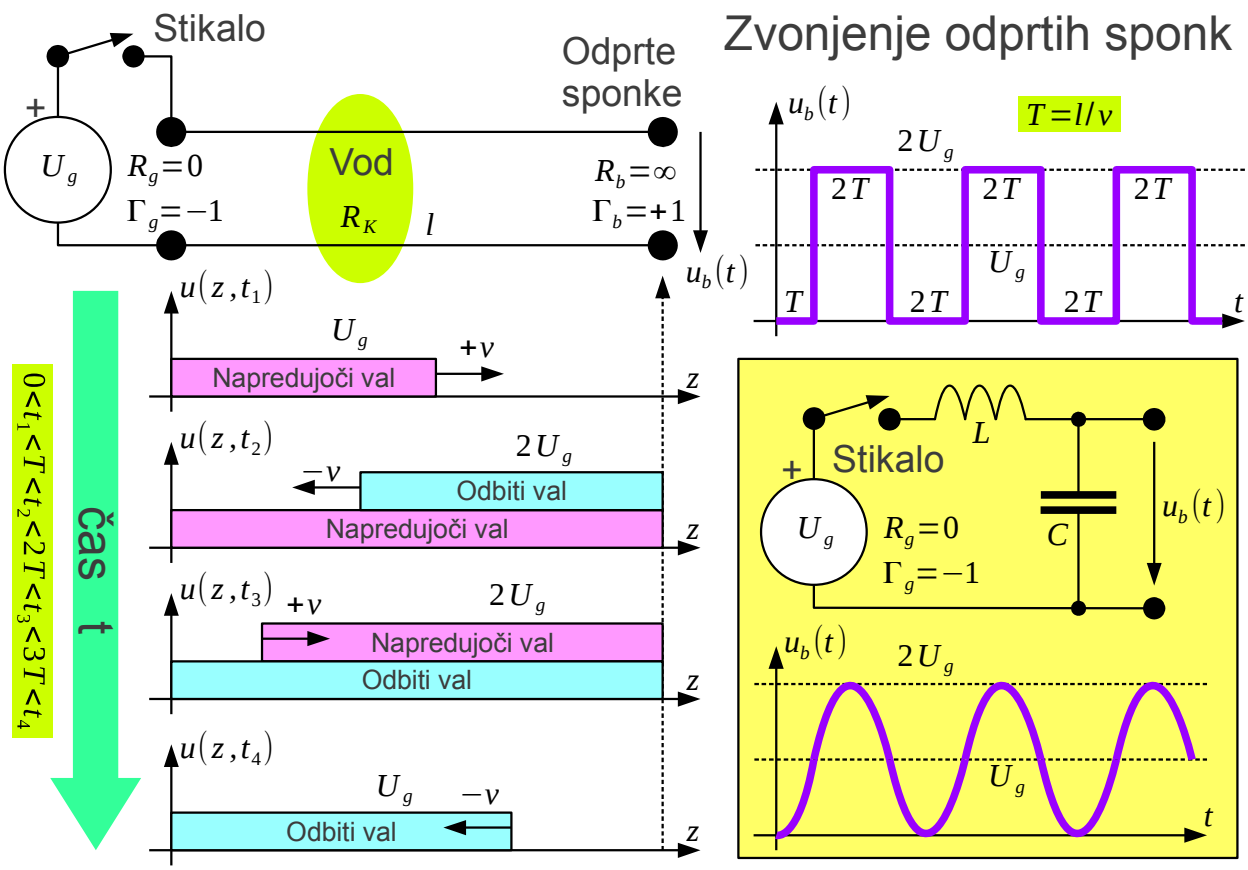
$$\Gamma = 8 \cdot \frac{U_V}{U_g}$$

Ena od pomanjkljivosti merilnega mostiča je ta, da vir, voltmeter in merjenec nimajo skupne sponke, ki bi jo lahko ozemljili, kar je še posebno težavno pri visokih frekvencah. Prikazana ozemljitev na sliki je namenjena zgolj reševanju vozliščnih enačb za potenciale V_1, V_2 in V_3, iz katerih izračunamo odziv U_V. Odziv U_V je kar sorazmeren odbojnosti Γ neznanega bremena in napetosti vira U_g, ni potrebno nobeno dodatno preračunavanje! Prikazani mostič je hkrati električno vezje, ki je sposobno natančno ločiti napredujoči val od odbitega vala.

Oboroženi s pojmom odbojnosti Γ se lahko lotimo zahtevnejših nalog, na primer reševanja prehodnih pojavov ob preklapljanju v električnih vezjih. Tu osnove elektrotehnike ne znajo rešiti nekaterih preprostih nalog. Na primer, če na vir napetosti U priključimo kondenzator kapacitivnosti C, steče vanj elektrina $Q = C \cdot U$. Vir pri tem opravi delo $A = Q \cdot U$ in shrani

energijo $W=Q\cdot U/2$ v kondenzatorju. Polovica energije je očitno poniknila nekje v prehodnem pojavu?

Isto nalogo opisuje elektrodinamika nekoliko drugače. Koncentrirani gradniki so samo računska poenostavitev. V resnici imamo samo porazdeljene gradnike, to je porazdeljene kondenzatorje, porazdeljene tuljave itd. Kondenzator lahko v elektrodinamiki ponazorimo s prenosnim vodom, ki ima na drugem koncu odprte sponke:



Odprte sponke pomenijo neskončno upornost bremena, $R_b=\infty$ in pripadajočo odbojnost $\Gamma_b=+1$. Napetostni vir U_g ima neskončno majhno notranjo upornost, $R_g=0$. Vir na začetku prenosnega voda opišemo z odbojnostjo vira, ki za napetostni vir znaša $\Gamma_g=-1$. Celoten prehodni pojav opisujemo kot odbijanje valovanja med virom na začetku voda in bremenom na koncu voda.

V trenutku, ko vključimo stikalo, vir še ne more »vedeti«, kaj je na drugem koncu voda, saj odbitega vala takrat še ni! Vir pošilja v vod samo napredujoči val, torej sta napetost U in tok I v razmerju R_K. Pripadajoča energija se kopiči kot energija električnega polja v kapacitivnosti voda in kot magnetna energija v induktivnosti voda.

Po času $T=l/v$ (velikostni razred $T\approx 1\mu\mathrm{s}$ pri $l=200\mathrm{m}$ in $v\approx 2\cdot 10^8\mathrm{m/s}$ za dielektrik polietilen) prednja fronta napredujočega vala doseže konec voda in se tam odbije. Ker znaša odbojnost odprtih sponk $\Gamma_b=+1$, ima napetost odbitega vala U_O enak predznak kot napetost napredujočega vala U_N. Skupna napetost na prenosnem vodu se podvoji na $2\mathrm{U}_g$, tok za fronto odbitega vala upade na nič. Za fronto odbitega vala se vsa energija pretvori v električno energijo v porazdeljeni kapacitivnosti, magnetna energija pa upade na nič.

Po času $2\mathrm{T}$ se odbiti val vrne do vira. Vir lahko šele tedaj »izve«, kaj se sploh dogaja na drugem koncu prenosnega voda! Odbiti val se ponovno odbije na viru. Ker ima slednji notranjo upornost nič $R_g=0$, se odbiti val ponovno odbije z obratnim predznakom $\Gamma_g=-1$. Dvakrat odbiti val se natančno izniči s prvotnim napredujočim valom. Podirajoča fronta napredujočega vala tedaj prazni energijo, ki se je nakopičila v prenosnem vodu. Ker v tem trenutku izvor vidi le še odbiti val, odbiti val vrača viru nakopičeno energijo iz prenosnega voda.

Po času $3\mathrm{T}$ podirajoča fronta napredujočega vala doseže konec voda. Napredujoči val povsem izgine. Napetost na odprtih sponkah upade na nič. Ker ni več napredujočega vala, se začne podirati tudi odbiti val, ki še vedno vrača nakopičeno energijo viru nazaj.

Po času $4\mathrm{T}$ se vsa energija vrne nazaj v vir. Na prenosnem vodu ni več nobenega toka niti napetosti, torej nič energije. Celoten cikel nihanja energije se čez čas $4\mathrm{T}$ ponovi na povsem enak način kot v trenutku, ko smo sklenili stikalo... Opisani pojav imenujemo zvonjenje prenosnega voda.

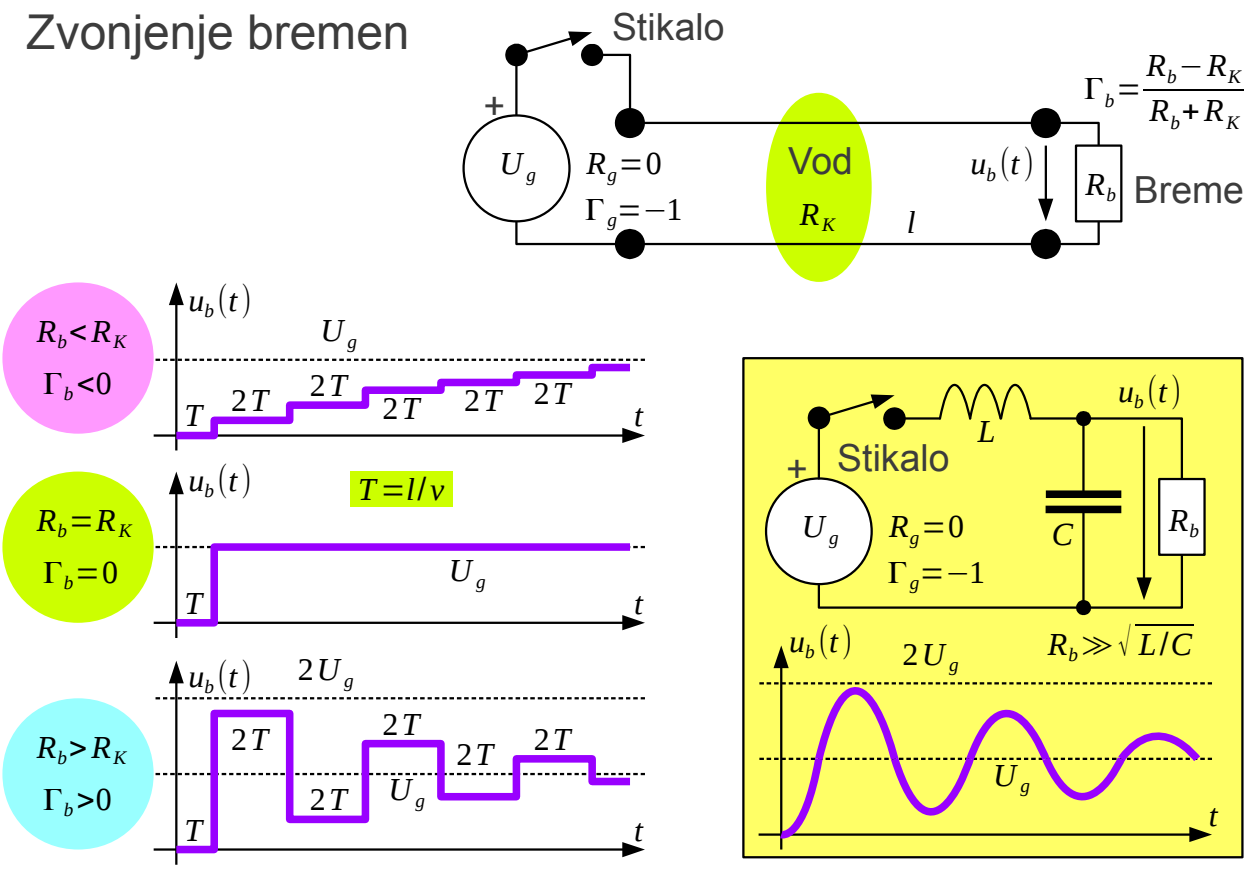
Zanimivo, popolnoma enakovredno zvonjenje opazimo tudi v vezju s koncentriranimi gradniki, ko kondenzator C priključimo na napetostni vir U_g prek zaporedne tuljave L, na primer induktivnosti priključnih žic. Tuljava L in kondenzator C tvorita električni zaporedni nihajni krog. Vklop stikala požene električno nihanje.

Napetost na odprtih sponkah oziroma na kondenzatorju niha med nič in dvakratno napetostjo vira $2\mathrm{U}_g$. Razlika med prenosnim vodom s porazdeljenima induktivnostjo L/l in kapacitivnostjo C/l ter vezjem s koncentriranima gradnikoma L in C je edino v časovni obliki nihanja napetosti: pravokotnik za prenosni vod s porazdeljenimi gradniki in sinus za koncentrirana gradnika.

Resnični koncentrirani gradniki in resnični prenosni vodi imajo tudi izgube, zaradi katerih opisani prehodni pojav izzveni. Dobro izdelane tuljave, kondenzatorji in prenosni vodi imajo majhne izgube, da opazimo tudi več kot 100 (sto!) prenihajev, preden prehodni pojav izzveni. Razlog izgub je tudi majhna, vendar končna notranja upornost vira $R_g \neq 0$. V točnejši, tri-dimenzijski obravnavi bi morali upoštevati še izgube sevanja!

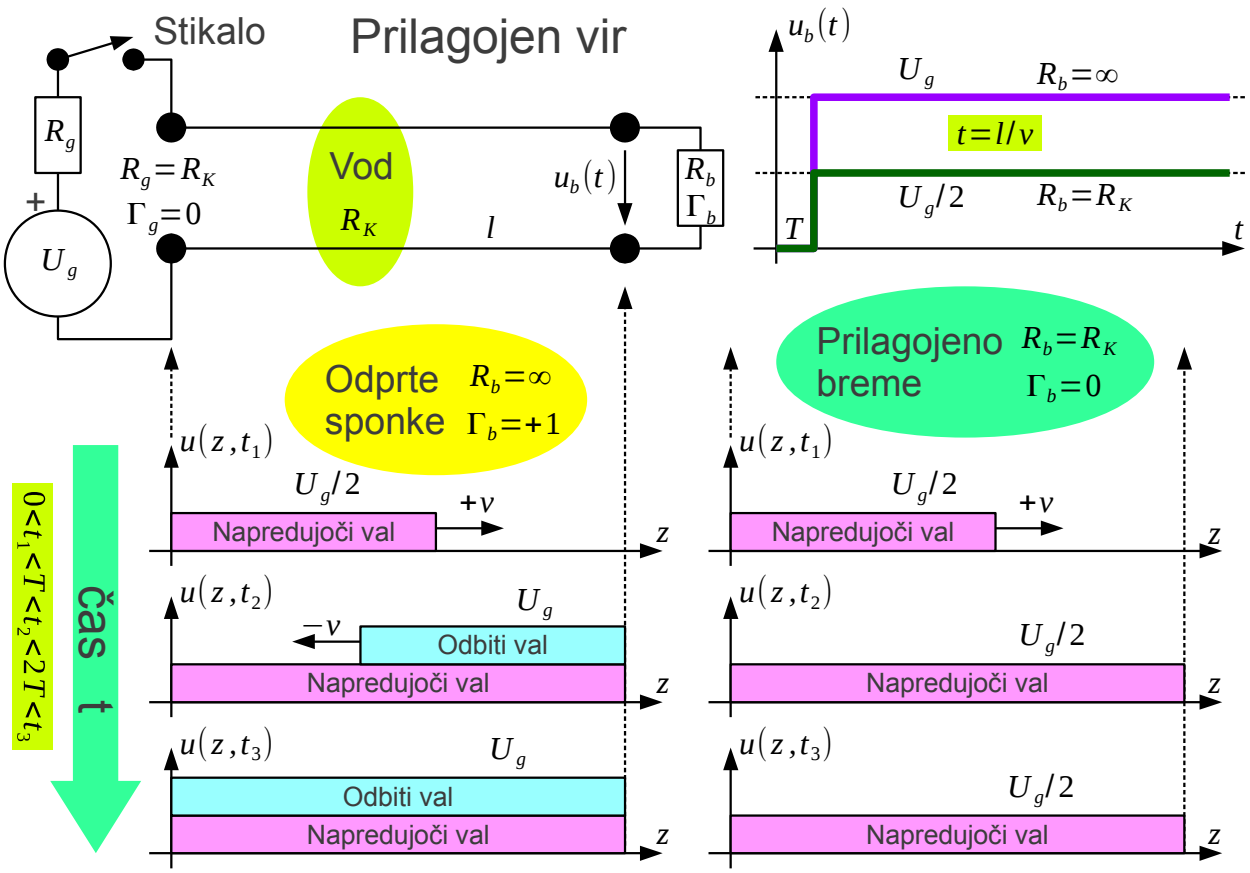
Električno zvonjenje je večinoma skrajno nezaželjen pojav. Dvojna napetost vira $2U_g$ je pogosto vzrok odpovedi gradnikov električnih vezij, ki so načrtovani za napetost napajanja U_g . Zvonjenje vnaša napake v prenos podatkov v številskih vezjih. Zvonjenje omejujemo na različne načine: s prilagoditvijo upornosti (impedance) bremena R_b , z gradniki za omejevanje napetosti na bremenu, s prilagoditvijo notranje upornosti vira R_g , z omejevanjem hitrosti preklapljanja vira itd.

Učinek različnih bremen na zvonjenje je prikazan na spodnji sliki v sicer enakih pogojih kot za odprte sponke. Napetostni vir ima notranjo upornost $R_g = 0$. Stikalo požene prehodni pojav. Brezizgubni prenosni vod ima karakteristično upornost R_K . Njegova dolžina l pri znani hitrosti valovanja v določa zakasnitev $T = l/v$:



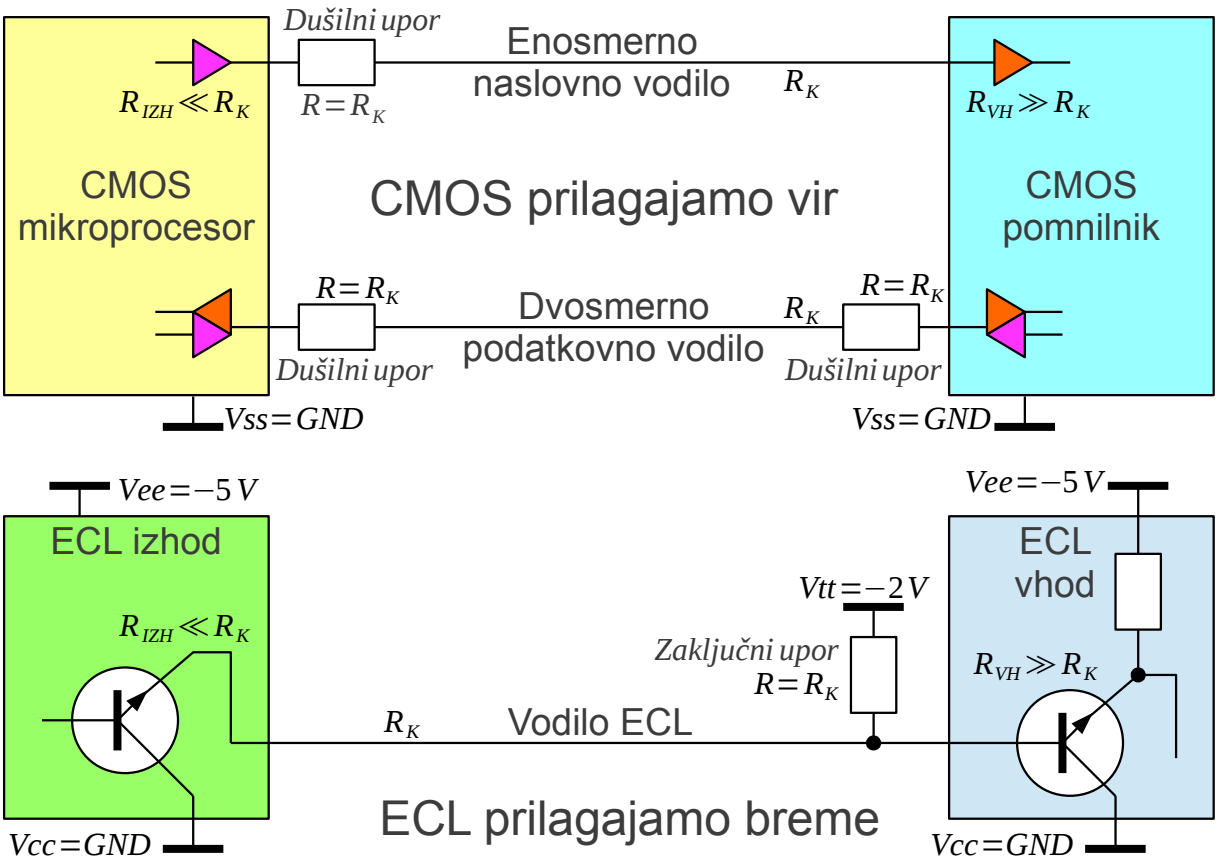
Dušen prenihaj dobimo samo v primeru, ko je upornost bremena $R_b > R_K$ večja od karakteristične upornosti R_K oziroma korena razmerja L/C. Ko je upornost bremena $R_b < R_K$ manjša od karakteristične upornosti, napetost na bremenu monotono narašča po stopničkah proti končni vrednosti U_g. V primeru prilagojenega bremena $R_b = R_K$ se prehodni pojav konča najhitreje, napetost na bremenu doseže končno vrednost U_g in se ustali že po času T.

Zvonjenje prenosnega voda lahko učinkovito zadušimo tudi s prilagojenim virom. Prilagojeni vir ima svojo notranjo upornost $R_g = R_K$ enako karakteristični upornosti voda. Zvonjenje napetosti na bremenu $u_b(t)$ izgine v vseh primerih, od odprtih sponk $R_b = \infty$ do prilagojenega bremena $R_b = R_K$:



Najstrožje zahteve po dušenju zvonjenja oziroma največje dopustne tolerance gradnikov omogoča prilagoditev na obeh koncih voda, to se pravi $R_g = R_b = R_K$. Takšna rešitev izgublja polovico moči signala na notranji upornosti vira, na zaporednem dušilnem uporu. Tudi napetost na bremenu je prepolovljena, $U_g/2$.

Zvonjenje je silno nadležen pojav na računalniških vodilih. Dolžine povezav med posameznimi čipi na tiskanem vezju so v velikostnem razredu $l \approx 10\,\mathrm{cm}$, torej je zakasnitev $T = l/v$ povsem primerljiva s preklopnimi časi logičnih signalov. Na električnih načrtih rišemo eno samo (signalno) žico prenosnega voda med oddajnikom (vijolični trikotnik) in sprejemnikom (oranžni trikotnik):



Druga žica je skupna elektroda ali masa (ground ali GND), ki jo na načrtih prikažemo z odebeljeno vodoravno črtico ali znakom za ozemljitev. Masa je izdelana kot velika kovinska ploskev, ki izkorišča celo plast večslojnega tiskanega vezja. Pogosto uporabljamo več notranjih plasti večslojnega tiskanega vezja za razvod napajanj Vdd , Vss , Vcc , Vee , Vgg , Vtt itd, ki so s stališča elektrodinamike vsi enakovredni masi GND , čeprav so na različnih enosmernih potencialih.

Večina logičnih vezij je danes izdelana v tehnologiji CMOS. CMOS izhodi sodobnih logičnih vezij imajo zelo nizko izhodno upornost. Zvonjenje vodila na tiskanem vezju preprečujemo z dodatnim dušilnim uporom, ki ga vežemo zaporedno s CMOS izhodom v pripadajočo signalno žico. Na enosmernem vodilu, na primer naslovno vodilo mikroračunalnika, zadošča en zaporedni upor na CMOS izhodu.

CMOS vhodi so praktično odprte sponke z zelo majhno kapacitivnostjo. Opisana rešitev vsebuje torej prilagojen vir in neprilagojeno breme, odprte sponke CMOS vhoda. Prednost take rešitve je v tem, da CMOS vhod dobi polno napetost izvora U_g, logične ravni signalov se torej ohranjajo. Zaporedni dušilni upor hkrati ne troši moči v stacionarnem stanju, ko se logična raven izhoda ne menja.

Na podatkovnem vodilu pa pretakamo podatke v obe smeri: beremo vsebino pomnilnika ali pa vanj vpisujemo. Ko je na enem koncu vodila dejaven oddajnik, drugi konec vodila sprejema. V takem (izmenično) dvosmernem vodilu opremimo z zaporednimi dušilnimi upori vse udeležence, ki lahko na vodilo karkoli oddajajo. Pri sprejemu ti upori nimajo učinka na delovanje CMOS vhodov. Logične ravni signalov se tudi tu ohranjajo.

ECL (Emitter-Coupled Logic) so vedno bile najhitrejše družine logičnih vezij. ECL izhodi običajno neposredno krmilijo prenosni vod. Ker je izhodna upornost ECL izhodov zelo nizka, se izhodi obnašajo kot napetostni vir z zelo nizko notranjo upornostjo $R_{IZH} \ll R_K$. Zvonjenje preprečimo na sprejemni strani s primernim bremenskim uporom R. Zaključni upor R vezan na $Vtt = -2\mathrm{V}$ hkrati poskrbi za enosmerni tok delovne točke emitorskega sledilnika v ECL izhodu. Sam ECL vhod ima razmeroma visoko notranjo upornost $R_{VH} \gg R_K$.

ECL uporablja tri ravni napajanja: Vcc, Vtt in Vee. Notranja skupna elektroda je Vcc in ta je največkrat tudi dejansko ozemljena $Vcc = GND$, kar je pogosto vzrok zmede na načrtih!

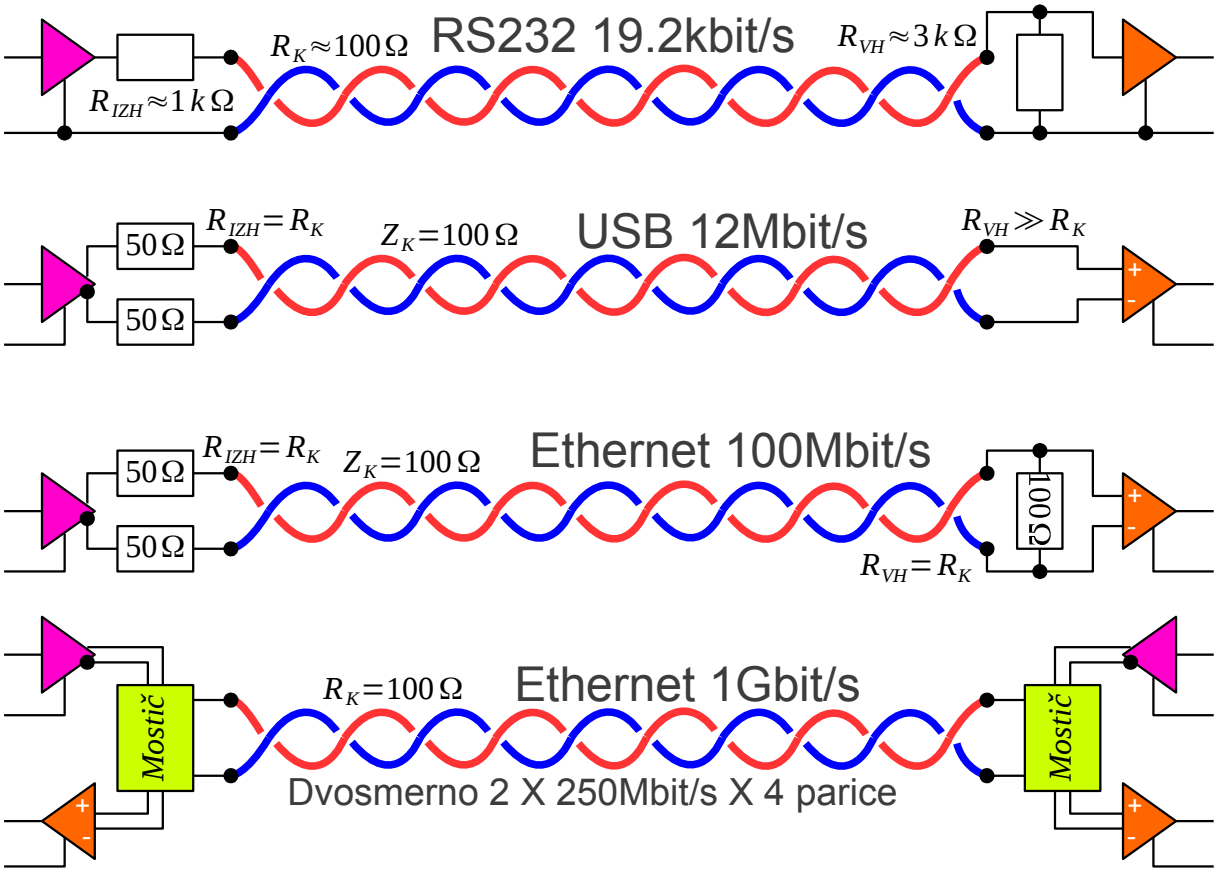
ECL vezja so bila vedno energetsko zelo požrešna. Znaten del moči napajanja se porabi tudi na zaključnih uporih R, tako ob preklopih kot tudi v stacionarnem stanju. V ECL vezjih za frekvence nad 3GHz so zaključni upori na vhodih vgrajeni kar v sam čip logičnega integriranega vezja.

Logična vezja za najvišje frekvence imajo izhode in vhode že v notranjosti prilagojene na karakteristično upornost prenosnega voda. Res hitra logična vezja običajno uporabljajo diferencialne izhode in vhode, ker ima simetrični dvovod boljše električne lastnosti od nesimetričnih vodov.

Simetrični dvovod pogosto uporabljamo v komunikacijah med računalniki na večjih razdaljah v velikostnem razredu $l \approx 100\,\mathrm{m}$. Simetrični dvovod ima (v teoriji) nižje izgube od koaksialnega kabla in je hkrati cenejši za izdelavo, saj zahteva manj bakra. Sevanje in druge neželjene elektromagnetne presluhe močno duši smotrno izbrano prepletanje žic simetričnega dvovoda, da dodaten oklop ni potreben.

Višanje prenosne hitrosti in različne protiukrepe proti zvonjenju še najbolj opazimo v razvoju zaporednih računalniških vmesnikov. Eden prvih takšnih vmesnikov je RS232, imenovan tudi »COM port« na računalnikih. RS232 naj bi omogočal prenos z zmogljivostjo 19.2kbit/s na razdalji do 18m. V resnici zmore RS232 več na večji razdalji. Predstavljene vrednosti so bile namreč svoj čas izbrane z veliko rezervo!

Niti oddajnik niti sprejemnik RS232 nista prilagojena na karakteristično upornost voda, ki ni točneje definirana. Simetrična parica je sicer uporabljena na nesimetričen način: ena žila je kar ozemljena na obeh straneh zveze, kar s stališča potovanja valov in odpornosti na elektromagnetne motnje zagotovo ni smotrno. Zvonjenje RS232 dušimo v oddajniku z omejevanjem hitrosti krmilnika (vijolični trikotnik) in višanjem njegove notranje upornosti $R_{IZH} \gg R_K$:



Korak naprej je USB, ki uporablja diferencialni oddajnik (vijolični trikotnik), simetrični prenosni vod in diferencialni sprejemnik (oranžni trikotnik). Simetrični dvovod torej tu povsem pravilno uporabljamo v simetričnem načinu. Pri prenosni hitrosti 12Mbit/s (Full-Speed USB) na razdalji 2m je prilagojena samo izhodna upornost oddajnika, $R_{IZH} = R_K$. Sprejemnik ima tako visoko vhodno upornost, $R_{VH} \gg R_K$, da se obnaša kot

odprte sponke. Kar na sliki ni prikazano, je to, da USB uporablja isti dvovod izmenično v eno ali v drugo smer.

Ethernet dosega domet 100m po neoklopljeni prepleteni parici UTP (Unshielded Twisted Pair). Domet omejujeta slabljenje in popačenje prenosnega voda. Prenosna hitrost 100Mbit/s zahteva prilagojeno notranjo upornost oddajnika $R_{IZH}=R_K$ in prilagojeno vhodno upornost sprejemnika $R_{VH}=R_K$, da zvonjenje ne moti prenosa podatkov. Podobno so izvedeni tudi High-Speed USB za 480Mbit/s in številni drugi hitri računalniški vmesniki.

Gigabitni Ethernet gre še en korak naprej in v celoti izkorišča teorijo telegrafske enačbe, ki pravi, da sta napredujoči val in povratni val popolnoma neodvisna eden od drugega, vsak ima svojo energijo in vsak prenaša svojo moč. Zmogljivost 1Gbit/s dosega tako, da po vsaki od štirih paric UTP kabla pelje 250Mbit/s. Istočasni dvosmerni prenos omogočajo mostiči na obeh koncih prenosnega voda, ki ločijo povratni val od napredujočega vala.

Pri dvosmernem prenosu v gigabitnem Ethernetu bo kakršenkoli odboj povzročil presluh med napredujočim valom in povratnim valom. Oddajniki, sprejemniki in mostiči morajo biti zato dobro prilagojeni na karakteristično upornost parice $R_K=100\Omega$. Ker so tolerance gradnikov, vodov in vtičnic prevelike, ima sprejemnik za gigabitni Ethernet vgrajena še vezja, ki se sproti prilagajajo, da izločajo presluh lastnega oddajnika in zvonjenje željenega sprejetega signala.

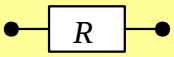
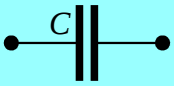
Istočasni dvosmerni prenos na istem vodu je sicer izumil že Oliver Heaviside v drugi polovici 19. stoletja. Izuma takrat niso razumeli. Izum je moral počakati celih 120 let, da je končno zaživel v gigabitnem Ethernetu!

* * * * *

4. Frekvenčni prostor in kazalci

Obravnava elektrotehnične naloge je v časovnem prostoru povsem nazorna. Trenutne fizikalne veličine, na primer napetost $u(t)$ in tok $i(t)$, so natančno tisto, kar vidimo na zaslonu osciloskopa. Časovno odvisnost namenoma poudarimo z zapisom veličin z malimi črkami. Reševanje enačb tudi s povsem linearnimi gradniki žal v časovnem prostoru ni preprosto. Obnašanje gradnikov, ki lahko hranijo energijo, na primer tuljav L oziroma kondenzatorjev C, opisujejo odvodi oziroma integrali vpletenih veličin.

Matematiki se reševanju linearnih enačb z odvodi in integrali spretno izognejo z integralskimi transformacijami. Obnašanju linearnega vezja pri krmiljenju s harmonskimi (sinusnimi) signali se dobro prilega Fourierjeva transformacija v frekvenčni prostor s krožno (realno) frekvenco ω. Za obravnavo prehodnih pojavov v linearnih vezjih je primernejša Laplacejeva transformacija s kompleksno frekvenco $s=\sigma+j\omega$. V obeh primerih se časovni odvodi oziroma integrali preslikajo v množenje oziroma deljenje s frekvenco:

Časovni prostor		Fourier	Laplace
$f(t)$	$\longleftrightarrow$	$F(\omega)=\int f(t)e^{-j\omega t}dt$ $j=\sqrt{-1}$	$F(s)=\int f(t)e^{-st}dt$ $s=\sigma+j\omega$
$\frac{d}{dt}f(t)$	$\longleftrightarrow$	$j\omega\cdot F(\omega)$	$s\cdot F(s)$
$\int f(t)dt$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{j\omega}\cdot F(\omega)$	$\frac{1}{s}\cdot F(s)$
$u(t)=R\cdot i(t)$		$U(\omega)=R\cdot I(\omega)$	$U(s)=R\cdot I(s)$
$u(t)=L\cdot\frac{di(t)}{dt}$		$U(\omega)=j\omega L\cdot I(\omega)$	$U(s)=sL\cdot I(s)$
$u(t)=\frac{1}{C}\cdot\int i(t)dt$		$U(\omega)=\frac{1}{j\omega C}\cdot I(\omega)$	$U(s)=\frac{1}{sC}\cdot I(s)$

Pri kateremkoli integriranju moramo meje postaviti tako, da je na mejah

integracije energija v gradnikih, tuljavah L in kondenzatorjih C, enaka nič oziroma upoštevana v dodatnih integracijskih konstantah. Na primer, začetno energijo v kondenzatorju upoštevamo kot dodatno napetost U_0, ki jo prištejemo integralu za napetost na kondenzatorju. Pri uporabi integralskih transformacij se jasno vprašamo, kaj v resnici pomenijo nove veličine, spektri $I(\omega)$ in $U(\omega)$ oziroma $I(s)$ in $U(s)$ v pripadajočem frekvenčnem prostoru ter kako jih izmerimo?

Najpreprostejši zgled je krmiljenje vezja s harmonskim virom ene same frekvence ω. Izmenično napetost $u(t)$ tedaj opisujeta dva realna podatka: amplituda U in pripadajoči fazni kot ϕ_U. Izraz $\cos(\omega t+\phi_U)$ lahko zapišemo tudi kot realni del kompleksne eksponentne funkcije. Oba realna podatka U in ϕ_U, ki imata jasno določen fizikalni pomen, združimo v eno samo kompleksno število $\hat{U}$, ki ga imenujemo kazalec (angleško: phasor) napetosti:

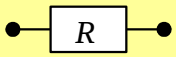
$$u(t)=U\cdot\cos(\omega t+\phi_U)=\mathrm{Re}\left[U\cdot e^{j\phi_U}\cdot e^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\hat{U}\cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$i(t)=I\cdot\cos(\omega t+\phi_I)=\mathrm{Re}\left[I\cdot e^{j\phi_I}\cdot e^{j\omega t}\right]=\mathrm{Re}\left[\hat{I}\cdot e^{j\omega t}\right]$$

Kazalci

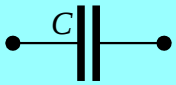
$$\hat{U}=U\cdot e^{j\phi_U}$$

$$\hat{I}=I\cdot e^{j\phi_I}$$

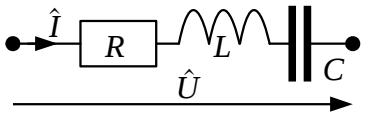


$$u(t)=R\cdot i(t)=\mathrm{Re}[R\cdot\hat{I}\cdot e^{j\omega t}] \longrightarrow \hat{U}=R\cdot\hat{I}$$

$$u(t)=L\cdot\frac{d\,i(t)}{dt}=\mathrm{Re}[L\cdot\hat{I}\cdot j\omega\cdot e^{j\omega t}] \longrightarrow \hat{U}=j\omega L\cdot\hat{I}$$

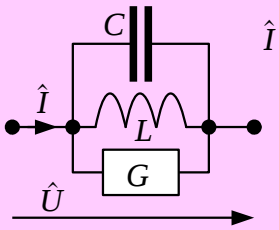


$$u(t)=\frac{1}{C}\cdot\int i(t)\,dt=\mathrm{Re}[\frac{1}{C}\cdot\hat{I}\cdot\frac{1}{j\omega}\cdot e^{j\omega t}] \longrightarrow \hat{U}=\frac{1}{j\omega C}\cdot\hat{I}$$



$$\hat{U}=\left(R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)\cdot\hat{I}=Z\cdot\hat{I}$$

$$Z=R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}=R+jX$$



$$\hat{I}=\left(j\omega C+\frac{1}{j\omega L}+G\right)\cdot\hat{U}=Y\cdot\hat{U}$$

$$G=1/R$$

$$Y=j\omega C+\frac{1}{j\omega L}+G=G+jB$$

Računanje s kazalci $\hat{U}$ in $\hat{I}$ postane z izjemo uporabe kompleksnih števil silno enostavno. Časovne odvode oziroma integrale zamenja množenje oziroma deljenje z $j\omega$. Integracijske konstante, energije v tuljavah L in v kondenzatorjih C, smemo zanemariti, saj pri eni sami frekvenci ω opazujemo ustaljeno (stacionarno) stanje vezja, ko je

kakršenkoli prehodni pojav že izzvenel.

Pri računu s kazalci je smiselno uvesti nova pojma impedance $Z=R+jX$ in admitance $Y=G+jB$. Impedanca Z je kompleksna upornost, ki vključuje realno upornost R in reaktanco X. Admitanca Y je kompleksna prevodnost, ki vključuje realno prevodnost G in susceptanco B. Imaginarni veličini X oziroma B opisujeta gradnike, ki hranijo energijo: tuljave L in kondenzatorje C. Takšne gradnike imenujemo reaktivni gradniki.

Integralske transformacije in računanje s kazalci so uporabni in priljubljeni računski postopki, ki uporabljajo kompleksna števila. Slednja nimajo preproste fizikalne razlage. Zatakne se že pri predznaku j.

Kakorkoli definiramo $j=\sqrt{-1}$ oziroma $j^2=-1$, kvadratni koren oziroma kvadratna enačba imata vedno dve rešitvi $+j$ in $-j$. Slednje si je težje predstavljati kot dve rešitvi $+1$ in -1 naloge $\sqrt{1}$ v obsegu realnih števil. Dve različni rešitvi kvadratnega korena oziroma kvadratne enačbe imata najmanj tri različne pomene:

V prvem primeru imata dve rešitvi vsaka svoj fizikalni pomen in obe rešitvi srečamo v praktičnih napravah. Nazoren primer sta napredujoči val in odbiti val, ki nastopata hkrati na istem prenosnem vodu. Neposredni val in odbiti val ustrezata dvema rešitvama korena $v=\pm 1/\sqrt{L/l\cdot C/l}$ oziroma $\beta=\pm\omega\sqrt{L/l\cdot C/l}$.

V drugem primeru imata dve rešitvi vsaka svoj fizikalni pomen, ampak samo ena od rešitev je preprosto izvedljiva in uporabna. Primer je sevanje točkastega izvora v koordinatnem izhodišču (r,Θ,Φ), kjer fazo opisuje člen e^{-jkr} v praznem prostoru. Rešitev s členom e^{+jkr} bi zahtevala porazdeljene izvore v neskončnosti, katerih sevanje vpija točkasto črno telo v koordinatnem izhodišču?

V tretjem primeru ima naloga samo eno fizikalno rešitev. Na primer, iz podatka $x=\sin\alpha$ računamo $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$, kjer ima samo ena od rešitev kvadratnega korena fizikalni pomen. Katera od rešitev ima fizikalni pomen, ni lahko ugotoviti, še posebno ne v primeru, ko je izraz $1-x^2$ kompleksno število (primer odboj in lom valovanja na meji dveh snovi).

Pogosto se moramo držati začetnega dogovora, katero od dveh (kompleksnih) rešitev korena oziroma enačbe uporabljamo za opis resničnega fizikalnega pojava. Izbiro predznaka j najbolj preprosto opisuje

preslikava odvajanja po času $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$ v frekvenčni prostor. Odvod harmonske funkcije oziroma $+j$ pomeni prehitevanje faze (angleško: phase lead). Integral harmonske funkcije oziroma $-j$ pomeni zaostajanje faze (angleško: phase lag).

Fazni zasuk je fizikalni pojav, ki ga opazujemo in merimo brez uporabe kompleksnih števil vključno s predznakom: prehitevanje (angleško: phase lead) ali zaostajanje (angleško: phase lag). Pri zapisu faznega zasuka s kompleksnimi števili se je zato nujno držati dogovora o predznaku j, ki sledi iz izbire predznaka eksponenta v integralskih transformacijah oziroma bolj preprosto $\cos(\omega t+\phi)=\mathrm{Re}[e^{j(\omega t+\phi)}]$.

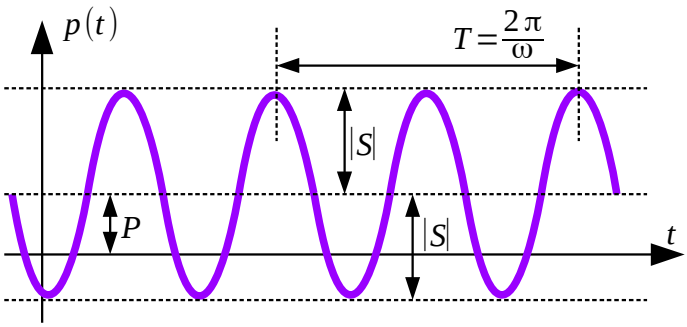
Povsem jasno bi v integralskih transformacijah lahko izbrali obraten predznak eksponenta oziroma bolj preprosto $\cos(\omega t+\phi)=\mathrm{Re}[e^{-j(\omega t+\phi)}]$. Slednje bi obrnilo na glavo definicijo predznaka faznega zasuka: $+j$ bi pri takšni izbiri pomenil zaostajanje faze oziroma $-j$ prehitevanje faze. V izogibanju nesporazumom tega ne počnemo!

Preprost račun s kazalci oziroma s spektri integralskih transformacij odpove, ko trčimo ob nelinearno nalogo. Najpogostejša nelinearna naloga je izračun moči. V časovnem prostoru je trenutna moč $p(t)=u(t)\cdot i(t)$ zmnožek trenutne napetosti in toka. Pri harmonskem krmiljenju trenutna moč niha z dvakratno frekvenco 2ω kot posledica kvadratne naloge, množenja napetosti in toka. Moč lahko v določenih trenutkih postane tudi negativna, ko tuljave L in kondenzatorji C vračajo vskladiščeno energijo nazaj viru:

$$u(t)=U\cdot\cos(\omega t+\phi_U)=\mathrm{Re}\left[\hat{U}\cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$i(t)=I\cdot\cos(\omega t+\phi_I)=\mathrm{Re}\left[\hat{I}\cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$\hat{U}=U\cdot e^{j\phi_U} \qquad \hat{I}=I\cdot e^{j\phi_I}$$



$$p(t)=u(t)\cdot i(t)=U\cdot I\cdot\cos(\omega t+\phi_U)\cdot\cos(\omega t+\phi_I)=\frac{U\cdot I}{2}\cdot\left[\cos(\phi_U-\phi_I)+\cos(2\omega t+\phi_U+\phi_I)\right]$$

Kompleksna moč $$S=P+jQ=\frac{\hat{U}\cdot\hat{I}^*}{2}=\frac{U\cdot e^{j\phi_U}\cdot I\cdot e^{-j\phi_I}}{2}=\frac{U\cdot I}{2}\cdot e^{j(\phi_U-\phi_I)}$$

Navidezna moč $$|S|=\left|\frac{\hat{U}\cdot\hat{I}^*}{2}\right|=\frac{U\cdot I}{2}=\frac{p(t_{MAX})-p(t_{MIN})}{2}$$

Delovna moč $$P=\langle p(t)\rangle=\mathrm{Re}\left[\frac{\hat{U}\cdot\hat{I}^*}{2}\right]=\frac{U\cdot I}{2}\cdot\mathrm{Re}\left[e^{j(\phi_U-\phi_I)}\right]=\frac{U\cdot I}{2}\cdot\cos(\phi_U-\phi_I)$$

Jalova moč $$Q=\mathrm{Im}\left[\frac{\hat{U}\cdot\hat{I}^*}{2}\right]=\frac{U\cdot I}{2}\cdot\mathrm{Im}\left[e^{j(\phi_U-\phi_I)}\right]=\frac{U\cdot I}{2}\cdot\sin(\phi_U-\phi_I)$$

Pri računanju s kazalci $\hat{U}$ in $\hat{I}$ je smiselno uvesti pojem kompleksne moči $S=P+jQ$. Pri izračunu moči je pomembna razlika med faznim kotom napetosti in toka $\phi_U-\phi_I$. Na primer, kompleksna moč na uporu je povsem delovna in večja od nič, razlika med faznima kotoma je tedaj enaka nič $\phi_U-\phi_I=0$. Reaktivni gradniki, tuljave in kondenzatorji, samo hranijo energijo, ne trošijo pa nobene moči, zato je kompleksna moč na njih povsem jalova in znaša razlika $\phi_U-\phi_I=\pm\pi/2$.

Razliko faznega kota dobimo z množenjem kazalca napetosti $\hat{U}$ s konjugirano-kompleksno vrednostjo kazalca toka $\hat{I}^*$. Ker kazalca $\hat{U}$ in $\hat{I}^*$ vsebujeta amplitudi, torej vršni vrednosti harmonske napetosti in toka, moramo rezultat za moč deliti z dva! Deljenje z dva neposredno sledi iz izračuna povprečne moči $\langle p(t)\rangle$, ko razstavimo produkt kosinusov v vsoto in izločimo nihanje moči z dvojno frekvenco 2ω .

V praksi pogosto uporabljamo efektivni vrednosti toka $I_{eff}=I/\sqrt{2}$ in napetosti $U_{eff}=U/\sqrt{2}$, da se izognemo deljenju z dva pri računanju moči. Podobno lahko definiramo tudi kazalca $\hat{I}_{eff}=\hat{I}/\sqrt{2}$ in $\hat{U}_{eff}=\hat{U}/\sqrt{2}$. Pri navajanju oziroma uporabi podatkov v praksi moramo biti zelo previdni, kaj točno mislimo: amplitudo (vršno vrednost) z merskimi enotami V ali

efektivno (koren povprečja kvadratov, angleško: root-mean-square ali RMS) vrednost z merskimi enotami $\mathrm{V}_{\mathrm{eff}}$ ($\mathrm{V}_{\mathrm{RMS}}$)?

Da je zmešnjava popolna, obstajata poleg amplitude in efektivne vrednosti še dve dodatni merski enoti za napetost. Napetost vrh-vrh je za harmonski signal točno dvojna amplituda $U_{PP}=2\mathrm{U}$ in jo merimo v enotah V_{PP} (angleško: volts peak-to-peak). Napetost »emf« (angleško: electro-motive force) je efektivna napetost odprtih sponk vira, ki ima notranjo impedanco $Z_g=Z_K$ enako dogovorjeni karakteristični impedanci. Ko je takšen vir priključen na breme $Z_b=Z_K$, velja $U_{emf}=U_{geff}=2U_{eff}$. Pripadajoča merska enota $\mathrm{V}_{\mathrm{emf}}$ se uporablja za opis občutljivosti radijskega sprejemnika.

Realni del kompleksne moči $S=P+jQ$ je delovna moč $P=\langle p(t)\rangle$ oziroma dolgotrajno časovno povprečje trenutne moči. Navidezna moč $|S|$ opisuje amplitudo nihanja trenutne moči $p(t)$ z dvakratno frekvenco 2ω okoli povprečja P . Imaginarni del kompleksne moči S je jalova moč Q oziroma merilo za vskladiščeno energijo v reaktivnih gradnikih, tuljavah in kondenzatorjih: $Q=2\omega\left(\langle W_m\rangle-\langle W_e\rangle\right)$.

V elektrodinamiki si pogosto ne moremo privoščiti zgoraj opisanega razkošja črk in oznak frekvenčnega prostora. Ko želimo izrecno poudariti kazalce, pripadajoči veličini $\hat{U}$ in $\hat{I}$ zapisujemo s strešicami nad velikimi črkami oziroma podčrtano $\underline{U}$ in $\underline{I}$, da jih razlikujemo od enosmernih veličin oziroma amplitud U in I . V večini nalog elektrodinamike si razkošja dodatnih strešic oziroma črtic ne želimo. Ko za določene veličine natančno vemo, da so kazalci, zanje uporabljamo kar velike črke brez strešic. Na primer, U in I v takšni nalogi pomenita kazalce!

Podobno si ne moremo privoščiti uporabe treh različnih črk P , Q in S samo za zapis kompleksne moči. V elektrodinamiki pogosto uporabljamo veliko črko P kar za kompleksno moč. $\mathrm{Re}[P]$ je tedaj delovna moč, $|P|$ navidezna moč in $\mathrm{Im}[P]$ jalova moč. Veliko črko S v elektrodinamiki najpogosteje uporabljamo za gostoto kompleksne moči na enoto površine z merskimi enotami $\mathrm{W/m^2}$. Realni del, velikost in imaginarni del pomenijo gostoto delovne moči $\mathrm{Re}[S]$, gostoto navidezne moči $|S|$ in gostoto jalove moči $\mathrm{Im}[S]$.

Končno je težava še s kazalci, ki jih nemarneži v tuji literaturi imenujejo kar vektorji namesto pravilnega angleškega izraza phasor. Vektorji so nekaj povsem drugega, potrebujemo jih za opis nekaterih fizikalnih veličin v tri-

dimenzijskih nalogah. V elektrodinamiki pogosto naletimo na veličine, ki so hkrati vektorji in kazalci, na primer izmenično (harmonsko) električno polje $\vec{E}$. Kaj takrat točno pomeni izraz $|\vec{E}|$, je treba razvozljati iz pripadajočega besedila oziroma smisla naloge: velikost vektorja (kompleksni skalar), velikost kazalca (realni vektor) ali oboje (realni skalar $\sqrt{\vec{E}\cdot\vec{E}^*}$)?

Pri meritvi časovno-spremenljivih fizikalnih veličin takoj naletimo na vprašanje merjenja časa oziroma točne sinhronizacije. Osciloskop lahko pravilno prikaže trenutne veličine, na primer napetost $u(t)$ oziroma tok $i(t)$ samo v primeru, da natančno poznamo čas t , torej poskrbimo za pravilno proženje časovne baze osciloskopa.

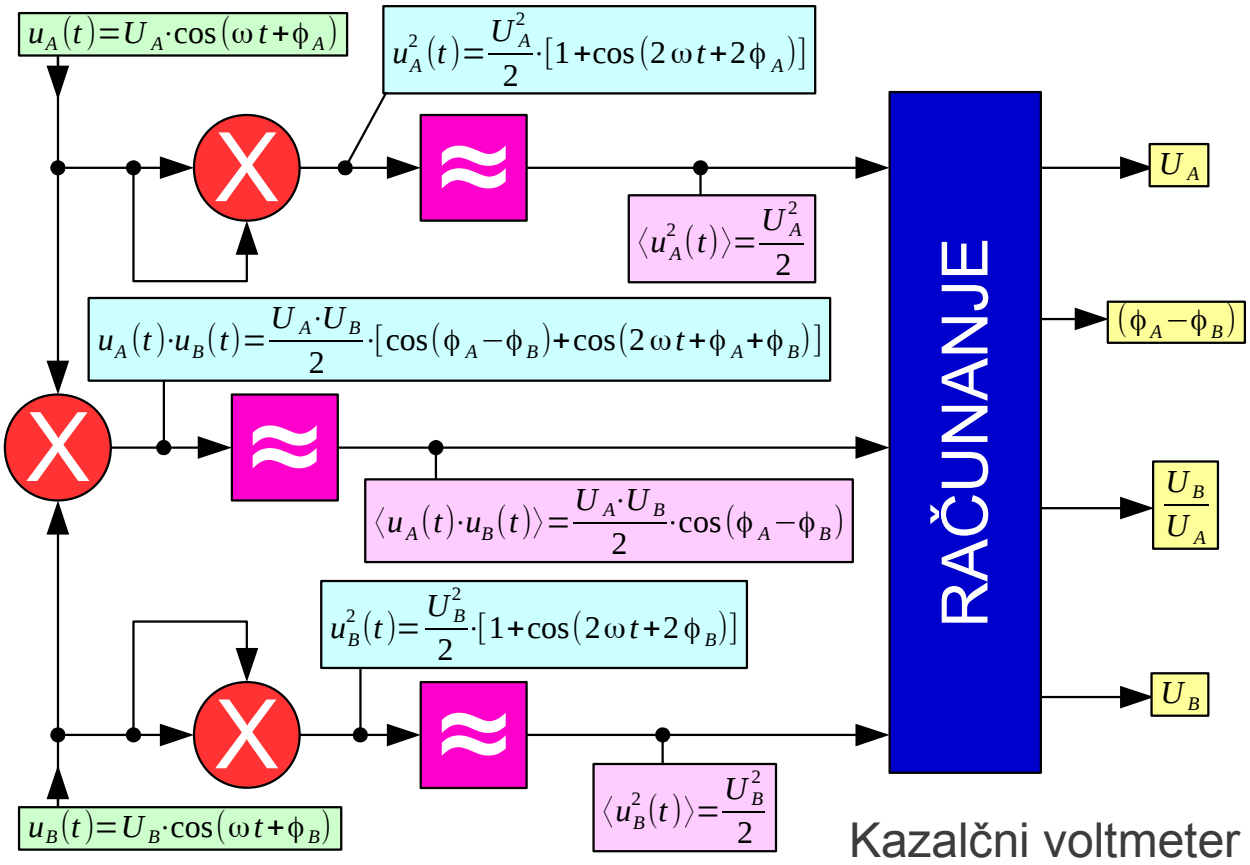
Sam osciloskop večinoma ne vsebuje neke silno natančne oziroma absolutne (atomske) ure za določanje časa t . Še slabšo natančnost določanja časa t lahko pričakujemo od kakršnegakoli merjenca. Časovno bazo osciloskopa zato največkrat prožimo kar na sam merjeni signal, na primer napetost $u(t)$. Časovno bazo osciloskopa lahko prožimo na nek drug signal v vezju, na primer na tok bremena $i(t)$, ki je v neposredni zvezi z merjeno veličino, na primer napetost na istem bremenu $u(t)$.

V frekvenčnem prostoru se vprašanje določanja časa preslika v vprašanje določanja faze neke merjene kazalčne veličine. Preprost izmenični voltmeter meri samo amplitudo napetosti U oziroma velikost kazalca $|\hat{U}|$ in jo prikaže v dogovorjenih merskih enotah V ali $\mathrm{V_{eff}}$ ($\mathrm{V_{RMS}}$) ali $\mathrm{V_{PP}}$. Izmenični voltmeter v svoji notranjosti meri povprečje kvadratov, torej povprečno izmenično moč, saj se informacija o absolutni fazi kazalca napetosti $\hat{U}$ pri povprečenju popolnoma izgubi!

Tako kot večinoma ne moremo meriti absolutnega časa t , večinoma ne moremo meriti niti absolutne faze ϕ neke kazalčne veličine. V frekvenčnem prostoru opazujemo hitrejše pojave v daljših časovnih razdobjih, torej je naloga določanja absolutne faze še težja. Frekvenca najboljše atomske ure, ki jo znamo danes izdelati, relativno odstopa $\Delta f/f \approx \pm 10^{-14}$. Če dve enaki, ampak popolnoma neodvisni atomski uri vgradimo v merjenec in v merilnik, lahko pri nazivni frekvenci $f = 1\,\mathrm{GHz} = 10^9\,\mathrm{Hz}$ odstopanje faze $\Delta\phi = \Delta\omega\cdot t > 10\,\mathrm{rd} \approx 573^0 \approx 1.59\mathrm{ciklov}$ preseže že po enem dnevu!

Relativno odstopanje frekvence telekomunikacijskih naprav je v velikostnem razredu $\Delta f/f \approx \pm 10^{-6}$. Merilniki so kvečjemu za en velikostni razred boljši. Meritev absolutne faze je tem primeru popolnoma nesmiselna. Vse, kar lahko praktično izmerimo, je relativna faza oziroma fazna razlika

med dvema izmeničnima signaloma iste frekvence ω s kazalčnim voltmetrom:



Preprost kazalčni voltmeter na sliki uporablja množilnike in nizkoprepustna frekvenčna sita. Če oba vhoda množilnika krmilimo z istim signalom $u(t)$, dobimo na njegovem izhodu $u^2(t)$ in po povprečenju v nizkoprepustnem situ še srednjo vrednost kvadratov $\langle u^2(t)\rangle$, torej kvadrat efektivne vrednosti. Če na vhoda množilnika pripeljemo različna signala $u_A(t)$ in $u_B(t)$, dobimo na izhodu nizkoprepustnega sita poleg amplitud obeh signalov še kosinus fazne razlike, $\cos(\phi_A-\phi_B)$.

Kazalčni voltmeter je dosti bolj komplicirana naprava od običajnega izmeničnega voltmetra tako za izdelavo kot pri praktični uporabi. Kazalčni voltmeter ima vsaj dva neodvisna vhoda (dva para priključnih sponk) in lahko meri le fazno razliko med njima, ne more pa meriti absolutne faze. Glede na notranjo obdelavo signalov (analogno oziroma številsko računanje) lahko kazalčni voltmeter prikaže samo eno amplitudo, obe amplitudi oziroma njun kvocient v linearnih ali logaritemskih merskih enotah.

Prikazani načrt kazalčnega voltmetra je poenostavljen. Ker je $\cos(\phi_A-\phi_B)$ soda funkcija, iz nje ne moremo določiti, ali gre za

prehitevanje ali za zaostajanje faze! Resnični merilnik vsebuje še dodatni množilnik z (za četrt periode) zakasnjeno inačico enega od vhodnih signalov, kar izmeri $\sin(\phi_A-\phi_B)$. Iz obeh meritev $\cos(\phi_A-\phi_B)$ in $\sin(\phi_A-\phi_B)$ se končno da enoveljavno določiti fazno razliko v celotnem razponu $0\leq(\phi_A-\phi_B)<2\pi$. Povsem jasno se izmerjeni predznak faze obrne, če vhoda merilnika A in B zamenjamo med sabo.

Zakasnitev četrt periode zahteva poznavanje frekvence signala. Frekvenco se da zanesljivo izmeriti samo na primerno močnem signalu, katerega frekvenčni spekter vsebuje eno samo, zadosti ozko spektralno črto. Dva neodvisna vhoda kazalčnega merilnika zato običajno nista enakovredna!

Frekvenco signala se običajno meri samo na referenčnem vhodu (A) kazalčnega merilnika, kjer mora biti vedno prisoten primerno močen in spektralno čist signal.

Drugi vhod je merilni vhod (B), kjer signal ni nujno vedno prisoten niti za njegov frekvenčni spekter ni zahtev. Edina omejitev je prekrmiljenje oziroma poškodba merilnika s premočnim signalom. S ciljem doseganja visoke občutljivosti merilnik izlušči na merilnem vhodu (B) le signal frekvence, ki ustreza meritvi na referenčnem vhodu (A). Brez reference (A) je v takšnem merilniku merilni vhod (B) mrtev tudi za amplitudo!

Kazalčni voltmeter imenujejo izdelovalci merilne opreme pogosto »vektorski voltmeter«. Strogo gledano je takšno ime neupravičeno, ker je električna napetost v vsakem primeru skalarna veličina. Merimo kvečjemu kazalec napetosti. Vektorski analizator vezij (Vector Network Analyzer ali VNA) meri amplitudo in fazo prevajalne funkcije, torej celoten $H(\omega)=U_{IZHOD}/U_{VHOD}$ (kompleksno razmerje kazalcev).

S pojmom »skalarni merilnik« označujejo izdelovalci merilnik amplitude, ki ne zna meriti faze. Skalarni analizator vezij (Scalar Network Analyzer ali SNA) meri torej samo amplitudo prevajalne funkcije $|H(\omega)|=|U_{IZHOD}/U_{VHOD}|$ (razmerje amplitud).

Pri meritvi celotnega frekvenčnega spektra $F(\omega)$ je določanje faze še veliko bolj zahtevno kot pri meritvi na eni sami frekvenci ω . Večina merilnikov spektra, napravo imenujemo spektralni analizator (Spectrum Analyzer ali SA), meri samo amplitudo frekvenčnega spektra $|F(\omega)|$ oziroma valovno-dolžinskega spektra $|F_\lambda(\lambda)|$. Spektralni analizatorji večinoma sploh niso opremljeni s kakršnimkoli vhodom, ki bi omogočal proženje oziroma sinhronizacijo meritve faze na zunanjo referenco.

Pri zelo visokih frekvencah, na primer v optičnih komunikacijah $f \approx 200\,\mathrm{THz} = 2 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz}$ ($\lambda_0 = c_0 / f \approx 1.5\,\mu\mathrm{m}$), je amplituda frekvenčnega $|F(\omega)|$ oziroma valovno-dolžinskega $|F_\lambda(\lambda)|$ spektra celo edina veličina, ki jo sploh lahko merimo. Na tako visokih frekvencah ne moremo meriti niti faze spektra $F(\omega)$ niti električnega polja $E(t)$ oziroma kakršnihkoli drugih veličin v časovnem prostoru. Omejitve naše merilne tehnike torej dajejo dodaten pomen frekvenčnemu prostoru, kjer lahko merimo vsaj amplitudo spektra, za razliko od časovnega prostora, kjer na visokih frekvencah ne znamo izmeriti ničesar.

V frekvenčnem prostoru so slabljenja in ojačanja lahko zelo visoka razmerja z razponom amplitud tudi več kot $1:10^6$ oziroma razponom moči več kot $1:10^{12}$. Povrhu rešitev telegrafske enačbe in številnih drugih nalog navajajo slabljenje v logaritemskih enotah. Logaritemske merske enote Nepri za razmerje amplitud in decibeli za razmerje moči so zato zelo priljubljene in praktično uporabne:

Neper

$$a_{Np} = \ln \frac{|\hat{U}_1|}{|\hat{U}_2|}$$

$$P = \frac{|\hat{U}|^2}{2 Z_K} \qquad |\hat{U}| = \sqrt{2 Z_K P}$$

$$a_{Np} = \ln \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2}$$

Decibel

$$a_{dB} = 10 \cdot \log \frac{P_1}{P_2}$$

$$a_{dB} = 10 \cdot \log \left| \frac{\hat{U}_1}{\hat{U}_2} \right|^2 = 20 \cdot \log \frac{|\hat{U}_1|}{|\hat{U}_2|}$$

$$a_{dB} = \frac{20}{\ln 10} \cdot \ln \frac{|\hat{U}_1|}{|\hat{U}_2|} = \frac{20}{2.3026} \cdot a_{Np}$$

Logaritemske enote za moč

$$P_{dBm} = 10 \cdot \log \frac{P}{1\,\mathrm{mW}} \qquad P_{dBW} = 10 \cdot \log \frac{P}{1\,\mathrm{W}}$$

$1\,\mathrm{kW} = 60\,\mathrm{dBm} = 30\,\mathrm{dBW}$

$1\,\mathrm{W} = 30\,\mathrm{dBm} = 0\,\mathrm{dBW}$

$1\,\mathrm{mW} = 0\,\mathrm{dBm} = -30\,\mathrm{dBW}$

$1\,\mu\mathrm{W} = -30\,\mathrm{dBm} = -60\,\mathrm{dBW}$

$1\,\mathrm{nW} = -60\,\mathrm{dBm} = -90\,\mathrm{dBW}$

$1\,\mathrm{pW} = -90\,\mathrm{dBm} = -120\,\mathrm{dBW}$

$1\,\mathrm{fW} = -120\,\mathrm{dBm} = -150\,\mathrm{dBW}$

Logaritemske merske enote

Nepri $[\mathrm{Np}]$ navajajo slabljenje a_{Np} oziroma ojačanje kot naravni logaritem razmerja amplitud napetosti (toka, polja, pritiska, hitrosti). Ker so pri izbrani (karakteristični) impedanci Z_K moči sorazmerne kvadratom pripadajočih amplitud, moramo pri izračunu a_{Np} razmerje moči koreniti

oziroma razpoloviti rezultat naravnega logaritma.

Rešitve telegrafske enačbe in drugih nalog dajejo rezultat kot naravni logaritem razmerja amplitud, torej so Nepri tu naravna merska enota. Nepri postanejo nerodni za uporabo, ko imamo več različnih vrst vodov z različnimi karakterističnimi impedancami Z_K , saj so vezani na razmerja napetosti oziroma polja. Na primer, idealni brezizgubni transformator impedance lahko celo ima ojačanje ali pa slabljenje v zapisu z Nepri!

Decibeli $[\mathrm{dB}]$ navajajo slabljenje a_{dB} oziroma ojačanje kot desetkratnik desetiškega logaritma (delovne) moči. Pri izbrani (karakteristični) impedanci Z_K moramo za izračun decibelov razmerje amplitud najprej kvadrirati oziroma množiti desetiški logaritem razmerja amplitud z 20 . Decibeli uporabljajo vsem preprosto razumljiv desetiški logaritem, razmerje moči pri tem ni vezano na neko karakteristično impedanco Z_K niti na vrsto prenosnega voda oziroma valovanja.

Pri pretvorbi iz Neprov $[\mathrm{Np}]$ v decibele $[\mathrm{dB}]$ upoštevamo drugačno osnovo logaritma, pretvorbo razmerja amplitud v razmerje moči in dogovorjeni desetkratnik za decibele. Decibel je mišljen kot desetina (deci) merske enote Bell. Skupaj dobimo faktor $20/\ln 10 \approx 8.68588963807$. Obratno vrednost istega faktorja uporabljamo pri pretvorbi iz decibelov v Nepre.

Logaritemske merske enote pogosto uporabljamo tudi za moči, napetosti, tlake (zvoka) in druge fizikalne veličine, ki niso neimenovana razmerja. Ker logaritem deluje na neimenovano razmerje, si moramo izbrati neko referenčno moč, napetost, tlak itd, glede na katero zapišemo razmerje v decibelih. Pri tem je najpogosteje uporabljana merska enota $[\mathrm{dBm}]$ za električno moč v primerjavi z referenčno močjo $P_{REF} = 1\,\mathrm{mW}$.

Manj znana, a bolj smiselna enota za električno moč je $[\mathrm{dBW}]$, to je moč glede na referenco $P_{REF} = 1\,\mathrm{W}$. Merska enota $[\mathrm{dB\mu V}]$ lahko pomeni napetost oziroma moč. Moč je mišljena v razmerju z referenčno močjo $P_{REF} \approx 1.333 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{W}$, ki jo predstavlja napetost $U_{eff} = 1\,\mu\mathrm{V}_{\mathrm{eff}}$ na karakteristični impedanci $Z_K = 75\,\Omega$.

Logaritemske merske enote niso uporabne za fazo! Fazo, bolj točno razliko faz, vedno navajamo v radianih v neposrednih rešitvah enačb oziroma v stopinjah v rezultatih meritev. Kazalčno veličino merilniki najpogosteje prikazujejo kot amplitudo v decibelih in hkrati pripadajočo fazo v stopinjah.

Povprečna moč $\langle P \rangle$ in efektivne merske enote, na primer $[\mathrm{V}_{\mathrm{eff}}]$, so natančno definirani s toplotnim učinkom tudi takrat, ko signali niso harmonski oziroma veličine niso skalarji. Na primer, povprečna moč povsem naključnega šuma $\langle P_N \rangle$ naravnega toplotnega sevanja. Drug pogost primer, efektivna električna poljska jakost $E[\mathrm{V}_{\mathrm{eff}}/\mathrm{m}]$ (realni skalar!) poljubne vektorske funkcije $\vec{E}(t)$.

* * * * *

5. Smithov diagram

Podobno kot ostale elektrotehnične naloge lahko prenosne vode obravnavamo v časovnem prostoru ali v frekvenčnem prostoru. Obravnava voda v frekvenčnem prostoru je povsem smiselna, ko z vodom prenašamo razmeroma ozkopasovne signale s pasovno širino $\Delta f \ll f_0$ dosti manjšo od osrednje frekvence, kar je pogost primer v radijskih oddajnikih in sprejemnikih. Obravnava izgub prenosnega voda je bolj preprosta v frekvenčnem prostoru. Končno nam obravnava v frekvenčnem prostoru prinese nov vpogled v delovanje prenosnega voda, tako v teoriji kot pri praktičnih meritvah.

V frekvenčnem prostoru, bolj točno pri krmiljenju s harmonskim virom ene same frekvence ω, trenutni veličini napetost $u(z,t)$ in tok $i(z,t)$ zamenjata kazalca napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$, ki ju tu pišemo brez strešic. Časovne oziroma frekvenčne odvisnosti posebej ne zapisujemo, saj k vsakemu kazalcu sodi zraven člen $e^{j\omega t}$. Slednjega po dogovoru ne zapisujemo, saj se v linearnih enačbah vedno krajša.

Telegrafsko enačbo prevedemo v frekvenčni prostor tako, da vse odvode po času zapišemo kot $\partial/\partial t = j\omega$. Ostanejo nam seveda odvodi po dolžini $\partial/\partial z$. Kazalca napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ sta funkciji samo spremenljivke z, torej lahko delne odvode $\partial/\partial z = d/dz$ pišemo kot navadne odvode.

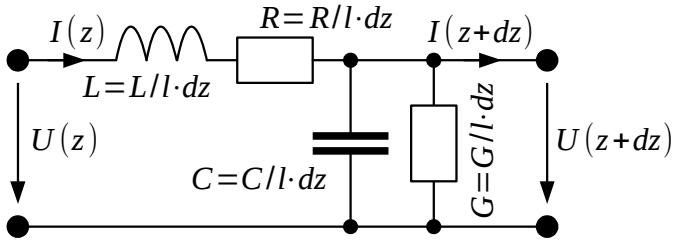
Pri reševanju sklopljenih diferencialnih enačb za kazalca napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ uporabimo namig iz časovnega prostora, kjer je prostorska odvisnost zelo podobna funkciji časovne odvisnosti. Enačbi poskusimo rešiti v frekvenčnem prostoru tako, da predpostavimo odvisnost od spremenljivke z v obliki $e^{\mp jkz}$. Pri tem je k poljubna konstanta, tudi kompleksna. Konstanta k ima globlji fizikalni pomen in si zasluži svoje lastno ime: valovno število.

Z uvedbo valovnega števila k pišemo odvode po dolžini z v obliki $d/dz = \mp jk$. Predznak - ali $+$ izbiramo v frekvenčnem prostoru na povsem enak način kot v časovnem prostoru, torej rešitev za napredujoči ali odbiti val. Drugi odvod po spremenljivki z ima vedno enak predznak $d^2/dz^2 = -k^2$ ne glede na to, ali gre za napredujoči oziroma odbiti val.

Z uvedbo valovnega števila k in poenostavitvijo zapisa odvodov po

dolžini z postane rešitev telegrafske enačbe v frekvenčnem prostoru silno preprosta, ne glede na to, ali upoštevamo izgube ali ne:

Vod z izgubami



$$\frac{dU(z)}{dz}=-j\omega L/l\cdot I(z)-R/l\cdot I(z)$$

$$\frac{dI(z)}{dz}=-j\omega C/l\cdot U(z)-G/l\cdot U(z)$$

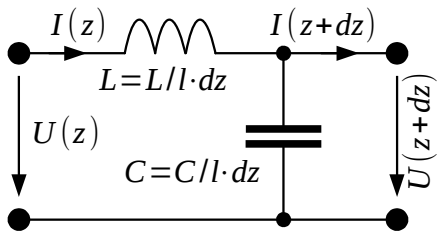
$$\frac{d^2U(z)}{dz^2}=(j\omega L/l+R/l)(j\omega C/l+G/l)\cdot U(z)=-k^2U(z)$$

$$k=\beta-j\alpha=\sqrt{-(j\omega L/l+R/l)\cdot(j\omega C/l+G/l)}$$

$$U(z)=U_N(0)\cdot e^{-\alpha z}\cdot e^{-j\beta z}+U_O(0)\cdot e^{+\alpha z}\cdot e^{+j\beta z}$$

$$u(z,t)=Re\left[U_N(0)\cdot e^{-\alpha z}\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}+U_O(0)\cdot e^{+\alpha z}\cdot e^{j(\omega t+\beta z)}\right]$$

Brezizgubni vod



$$\frac{d^2U(z)}{dz^2}=-\omega^2 L/l\cdot C/l\cdot U(z)=-k^2U(z)$$

$$k=\beta=\omega\sqrt{L/l\cdot C/l}=\frac{\omega}{v}$$

$$U(z)=U_N(0)\cdot e^{-j\beta z}+U_O(0)\cdot e^{+j\beta z}$$

$$u(z,t)=Re\left[U_N(0)\cdot e^{j(\omega t-\beta z)}+U_O(0)\cdot e^{j(\omega t+\beta z)}\right]$$

Napredujoči val

Odbiti (povratni) val

Brezizgubni vod ima povsem realno valovno število k. Valovno število k brezizgubnega voda opisuje samo spreminjanje faze kot funkcijo dolžine z. Valovno število je tedaj kar enako fazni konstanti $k=\beta$, ki ima merske enote $[\mathrm{rd/m}]$ (radiani na meter). Faza napredujočega vala povsem jasno zaostaja z dolžino, $e^{-j\beta z}$, faza odbitega vala pa napreduje z dolžino, $e^{+j\beta z}$.

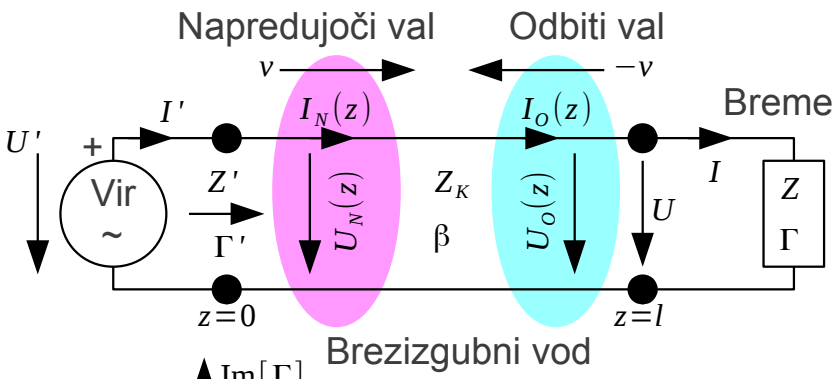
Pri krmiljenju s harmonskim virom frekvence ω lahko na prenosnem vodu uvedemo pojem valovne dolžine λ. Valovna dolžina je razdalja, na kateri se faza kazalcev napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ ponovi oziroma naredi polni krog $\beta\cdot\lambda=2\pi$. Valovno dolžino lahko izračunamo iz fazne konstante oziroma iz hitrosti valovanja: $\lambda=2\pi/\beta=2\pi v/\omega=v/f$.

Vod z izgubami ima kompleksno valovno število $k=\beta-j\alpha$. Realni del valovnega števila je tudi v tem primeru fazna konstanta $\beta=\mathrm{Re}[k]$, ki ima povsem enak fizikalni pomen kot pri brezizgubnem vodu. Imaginarni del $\alpha=-\mathrm{Im}[k]$ opisuje slabljenje voda na enoto dolžine v logaritemskih merskih enotah $[\mathrm{Np/m}]$ (Nepri na meter). Slabljenje napredujočega vala v

smeri $+z$ zapišemo kot $e^{-\alpha z}$, slabljenje odbitega vala v smeri $-z$ pa kot $e^{+\alpha z}$.

Na povsem enak način kot v časovnem prostoru tudi v frekvenčnem prostoru poimenujemo razmerje med odbitim in napredujočim valom odbojnost $\Gamma = U_O(z)/U_N(z)$. Razmerje dveh kazalcev je kompleksno število in je funkcija položaja $\Gamma = \Gamma(z)$. Na brezizgubnem vodu se spreminjata samo fazi napredujočega $U_N(z)$ in odbitega vala $U_O(z)$. Absolutna vrednosti kompleksne odbojnosti $|\Gamma(z)|$ oziroma velikost odbojnosti se vzdolž brezizgubnega voda ne spreminja!

Kompleksno odbojnost Γ na priključnih sponkah bremena izračunamo na podoben način kot v časovnem prostoru, le da upornost bremena R v frekvenčnem prostoru nadomesti impedanca bremena Z. Karakteristično impedanco Z_K brezizgubnega voda izračunamo v frekvenčnem prostoru na povsem enak način kot karakteristično upornost R_K v časovnem prostoru. Povsem jasno se predznak odbojnosti zamenja pri računanju z dualnimi veličinami, admitanco bremena Y in karakteristično admitanco prenosnega voda Y_K:

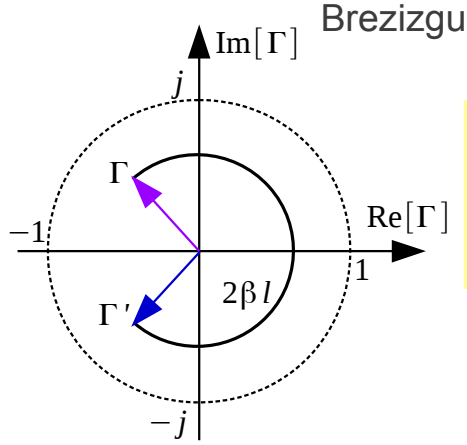


Brezizgubni vod

$$U_N(z) = U_N(0)\cdot e^{-j\beta z}$$

$$U_O(z) = U_O(0)\cdot e^{+j\beta z}$$

$$\frac{U_N}{I_N} = \frac{-U_O}{I_O} = Z_K = \sqrt{\frac{L/l}{C/l}}$$



Pasivno breme

$\mathrm{Re}[Z] = R \geq 0$

$|\Gamma| \leq 1$

$$\Gamma = \frac{Z - Z_K}{Z + Z_K} = \frac{Y_K - Y}{Y_K + Y} = \frac{U_O(l)}{U_N(l)}$$

$$\Gamma' = \frac{U_O(0)}{U_N(0)} = \Gamma\cdot e^{-j2\beta l}$$

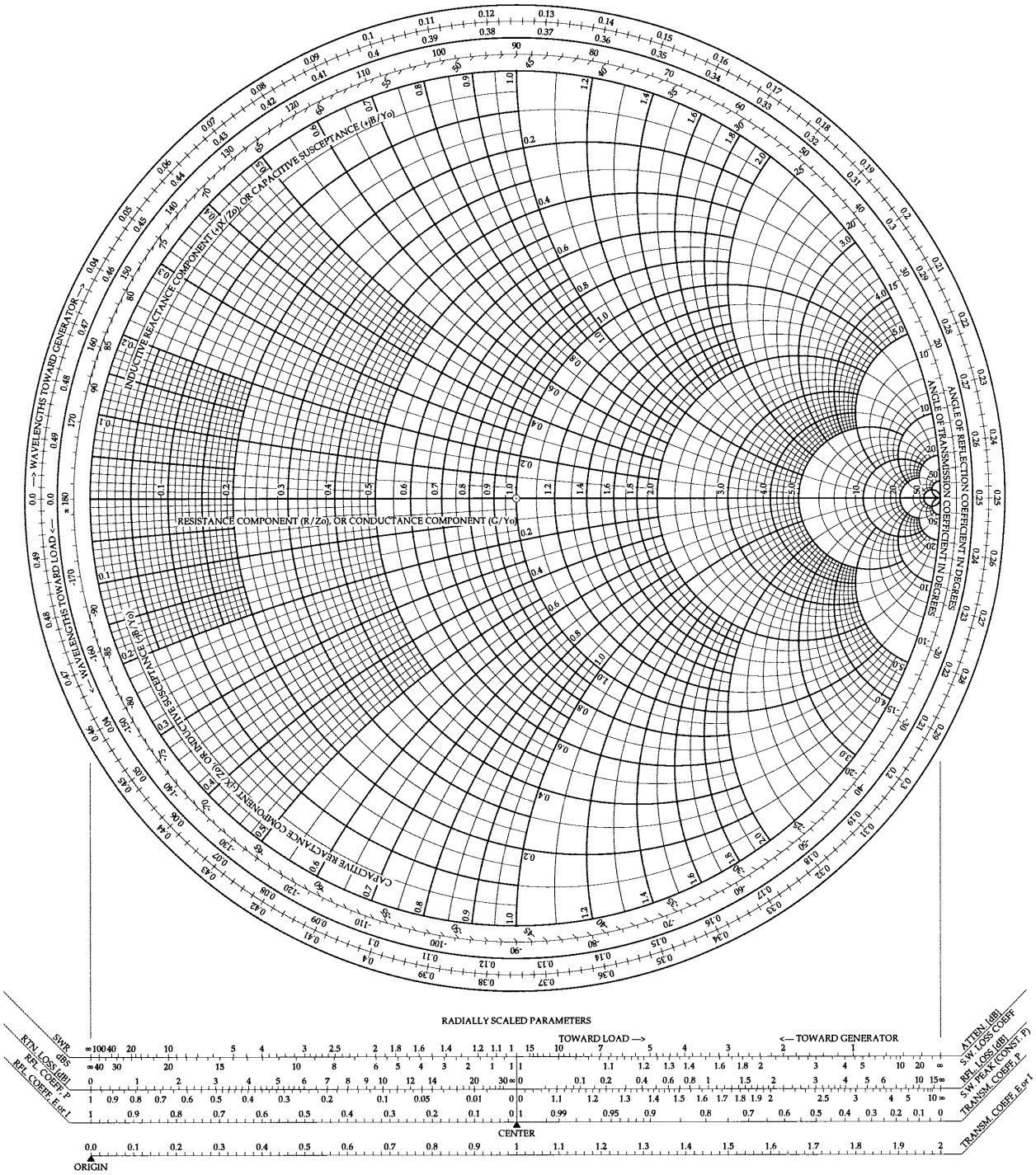
$$Z' = Z_K\cdot\frac{1+\Gamma'}{1-\Gamma'}$$

$$Z' = Z_K\cdot\frac{1+\frac{Z-Z_K}{Z+Z_K}\cdot e^{-j2\beta l}}{1-\frac{Z-Z_K}{Z+Z_K}\cdot e^{-j2\beta l}} = Z_K\cdot\frac{Z\cos(\beta l) + jZ_K\sin(\beta l)}{Z_K\cos(\beta l) + jZ\sin(\beta l)}$$

Smithov diagram

Kakršnokoli pasivno breme $\mathrm{Re}[Z]=R\geq 0$ ima velikost odbojnosti vedno manjšo ali enako ena: $|\Gamma|\leq 1$. Odbojnost kakršnegakoli pasivnega bremena lahko prikažemo v kompleksnem diagramu znotraj enotnega kroga! Takšen prikaz odbojnosti imenujemo Smithov diagram. Na Smithovem diagramu imamo pogosto vrisane tudi krivulje za delovni in reaktivni del impedance $Z=R+jX$ oziroma admitance $Y=G+jB$:

Smithov diagram:
impedanca/admitanca v merilu odbojnosti



Velikost odbojnosti $|\Gamma|$ pogosto izražamo v logaritemskih enotah. Veličino $\Gamma_{dB}=20\log\left(|U_O|/|U_N|\right)=20\log|\Gamma|$ imenujemo tudi prilagoditev ali povratno slabljenje (angleško: Return Loss ali RL).

Komplicirani računi izmeničnih vezij postanejo v Smithovem diagramu silno preprosti. Če med breme in vir vstavimo prenosni vod dolžine l z znano karakteristično impedanco Z_K, se vzdolž voda spreminja samo faza odbojnosti. Bolj točno, odbojnost se zavrti nazaj za dvojni kot $2\beta l$ faze napredujočega oziroma odbitega vala.

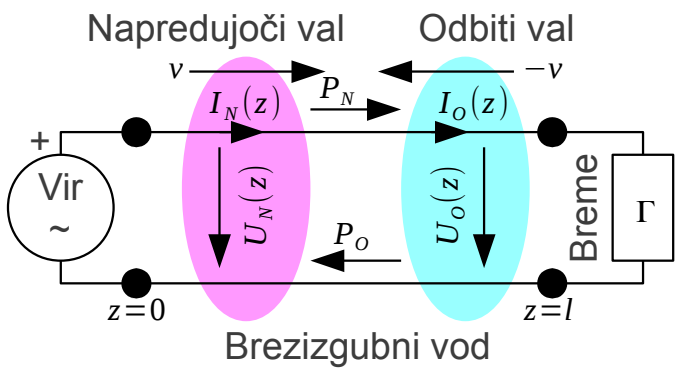
Postopek računanja na brezizgubnem vodu je naslednji. Najprej iz impedance bremena Z določimo odbojnost bremena Γ. Vir vidi preslikano odbojnost $\Gamma'=\Gamma e^{-j2\beta l}$, kar predstavlja vrtenje odbojnosti v Smithovem diagramu. Končno iz preslikane odbojnosti Γ' izračunamo nazaj preslikano impedanco Z', ki jo občuti vir.

Celotno preslikavo impedance bremena Z v impedanco Z', ki jo občuti generator, lahko na brezizgubnem vodu zapišemo s preprosto enačbo. Ko je dolžina voda $l=m\cdot\lambda/2$ celoštevilski mnogokratnik polovice valovne dolžine, se impedanca preslika v povsem enako vrednost $Z'=Z$. Odbojnost $\Gamma(z)$ naredi takrat celo število polnih krogov v Smithovem diagramu.

Ko je dolžina voda lihi mnogokratnik četrtine valovne dolžine $l=(2\mathrm{m}+1)\cdot\lambda/4$, se impedanca invertira v $Z'=Z_K^2/Z$. Invertiranje pomeni zasuk za pol kroga v Smithovem diagramu. Pri invertiranju se kratki stik $Z=0$ preslika v odprte sponke $Z'=\infty$. Velja tudi obratno, odprte sponke se pri invertiranju z vodom dolžine $\lambda/4$ preslikajo v kratek stik.

Vod dolžine $\lambda/4$, ki ima na enem koncu odprte sponke in je na drugem koncu kratko sklenjen, se obnaša kot vzporedni LC nihajni krog uglašen na frekvenco ω. Električni nihajni krog s porazdeljenimi gradniki L/l in C/l imenujemo tudi četrt-valovni rezonator.

Iz napetosti $U(z)$ in toka $I(z)$ na prenosnem vodu izračunamo kompleksno moč P. Kompleksna moč vsebuje delovno moč $\mathrm{Re}[P]$ in jalovo moč $\mathrm{Im}[P]$. Delovna moč ustreza razliki moči napredujočega in odbitega vala $\mathrm{Re}[P]=P_N-P_O$:



$$U(z)=U_N(z)+U_O(z)$$

$$I(z)=I_N(z)+I_O(z)$$

$$\frac{U_N(z)}{I_N(z)}=-\frac{U_O(z)}{I_O(z)}=Z_K=\sqrt{\frac{L/l}{C/l}}$$

$$P=\frac{U(z)\cdot I(z)^*}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left[U_N(0)\cdot e^{-j\beta z}+U_O(0)\cdot e^{+j\beta z}\right]\cdot\left[\frac{U_N(0)^*}{Z_K}\cdot e^{+j\beta z}-\frac{U_O(0)^*}{Z_K}\cdot e^{-j\beta z}\right]$$

$$P=\frac{|U_N|^2}{2Z_K}-\frac{|U_O|^2}{2Z_K}+j\frac{|U_N\cdot U_O|}{Z_K}\cdot\sin(2\beta z+\phi)$$

$$U_N(0)\cdot U_O(0)^*=|U_N\cdot U_O|\cdot e^{-j\phi}$$

$$U_O(0)\cdot U_N(0)^*=|U_N\cdot U_O|\cdot e^{+j\phi}$$

Moči valov

$$P_N=\frac{|U_N|^2}{2Z_K}$$

Napredujoča moč

$$P_O=\frac{|U_O|^2}{2Z_K}$$

Odbita moč

Energija stojnega vala

$$\mathrm{Re}[P]=P_N-P_O$$

$$P_O=|\Gamma|^2\cdot P_N$$

$$\mathrm{Re}[P]=P_N\cdot(1-|\Gamma|^2)$$

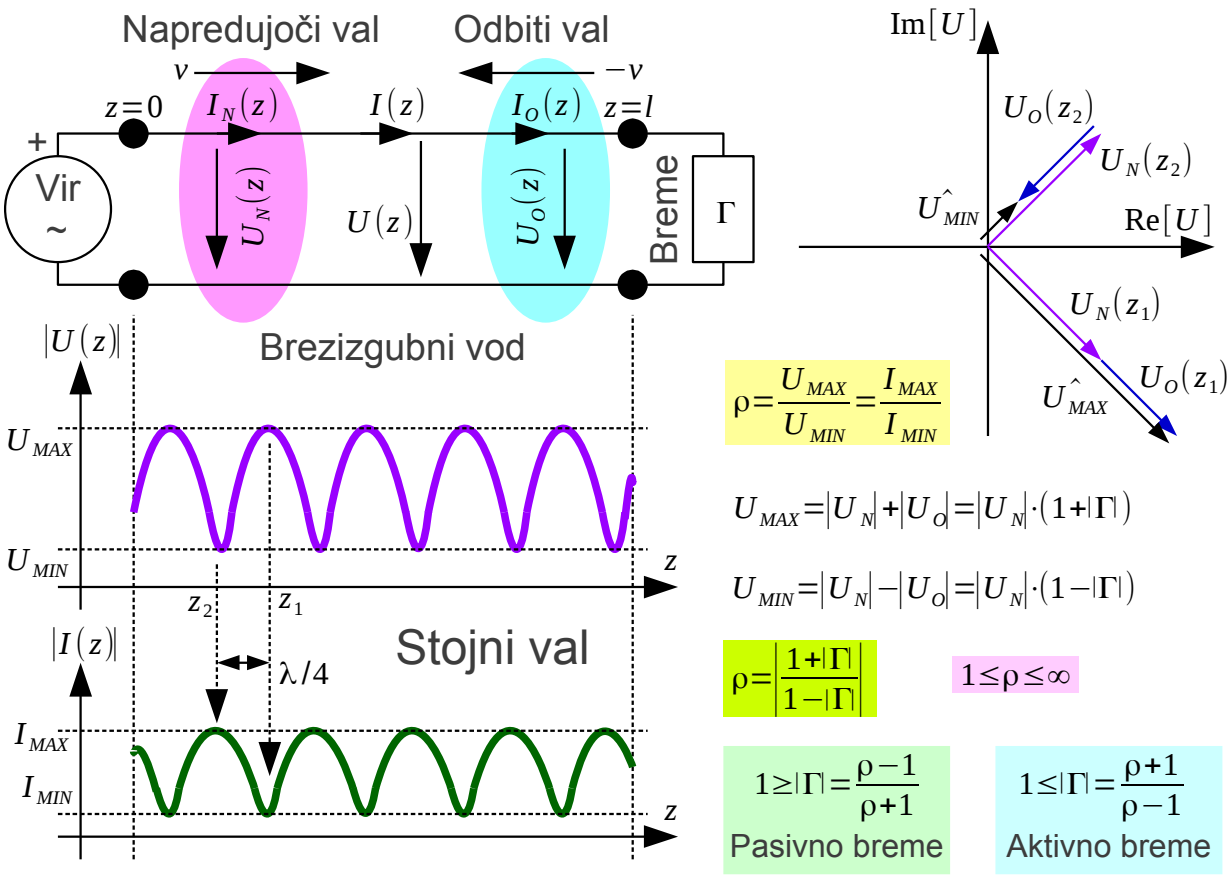
Skupna energija $W=W_N+W_O$ na prenosnem vodu je enaka vsoti energije napredujočega vala in energije odbitega vala. Napetost in tok na prenosnem vodu sta kazalčni vsoti napetosti in tokov posameznih valov. Pripadajoči interferenčni pojav imenujemo stojni val. V stojnem valu višek energije niha naprej-nazaj po prenosnem vodu. Magnetna energija v porazdeljeni induktivnosti L/l se pretvarja v električno energijo v porazdeljeni kapacitivnosti C/l in obratno. Nihajočo energijo opisuje jalova moč $\mathrm{Im}[P]$ na prenosnem vodu.

Stojni val najenostavneje opišemo na brezizgubnem vodu. Kazalca napetosti napredujočega $U_N(z)$ in odbitega $U_O(z)$ vala se na določenih mestih (z_1) sofazno seštevata v U_{MAX}, na nekaterih drugih mestih (z_2) pa se protifazno seštejeta v U_{MIN}. Razdalja med sosednjima maksimumom in minimumom napetosti je enaka četrtini valovne dolžine $|z_1-z_2|=\lambda/4$.

Stojni val amplitude napetosti $|U(z)|$ predstavlja ovojnico, pod katero se plazi sinusno valovanje s hitrostjo v od izvora k pasivnemu bremenu. Med plazenjem se amplituda valovanja stalno prilagaja tako, da se valovanje natančno dotika, a nikjer ne seka ovojnice stojnega vala. Ovojnica $|U(z)|$

nima sinusne oblike, minimumi oziroma globeli so ožje, maksimumi oziroma hrbti pa širši.

Če se niti frekvenca vira ω niti gradniki vezja s časom ne spreminjajo, ostaja ovojnica $|U(z)|$ popolnoma nespremenjena vedno na istem mestu. Od tod ime stojni val:



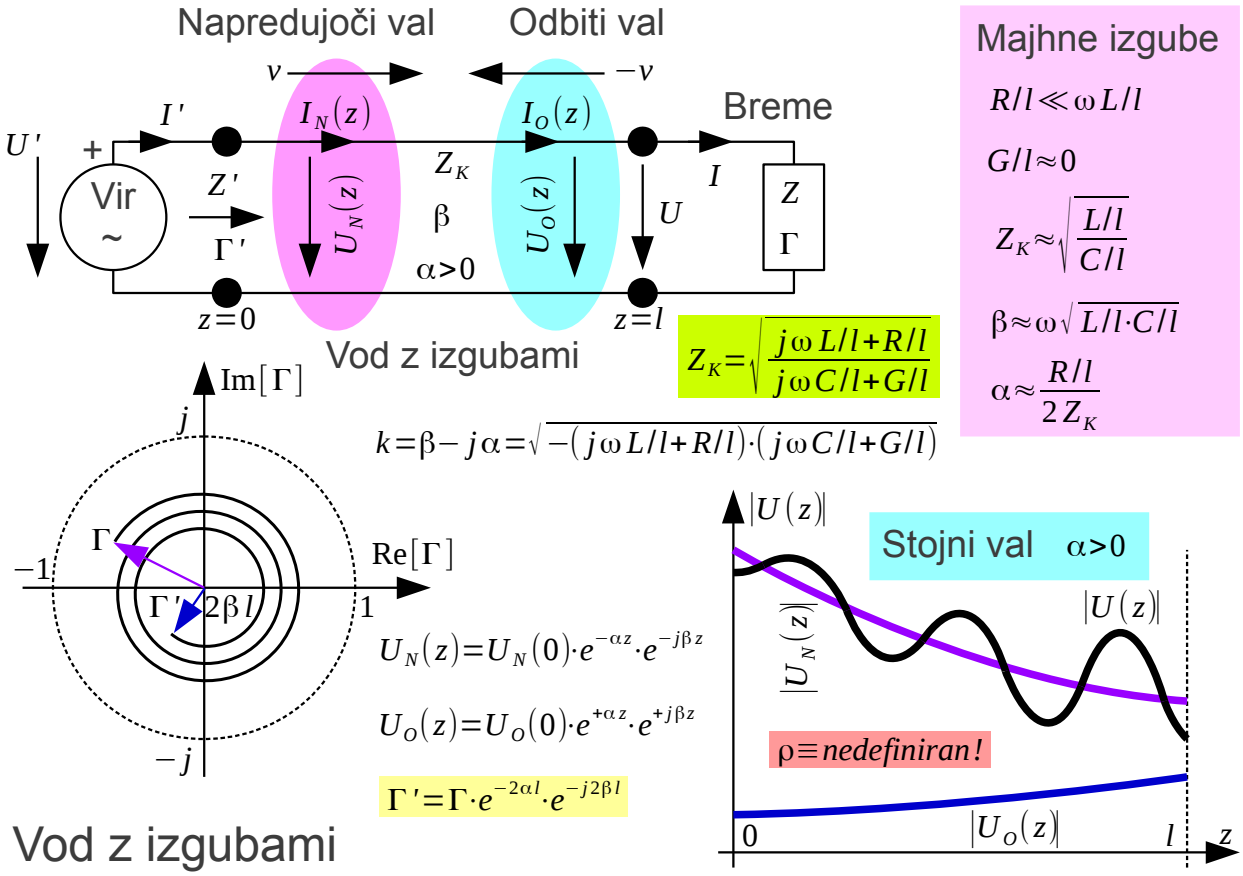
Podoben stojni val, kot ga ima amplituda napetosti $|U(z)|$, ima tudi amplituda toka $|I(z)|$. Položaji maksimumov toka (z_2) pri tem sovpadajo s položaji minimumov napetosti, položaji maksimumov napetosti (z_1) pa sovpadajo s položaji minimumov toka. Energija niha z dvakratno frekvenco 2ω med hrbti toka in hrbti napetosti. Energija se kopiči v obliki magnetne energije v porazdeljeni induktivnosti L/l v okolici hrbtov toka oziroma v obliki električne energije v porazdeljeni kapacitivnosti C/l v okolici hrbtov napetosti.

Na brezizgubnem vodu lahko določimo razmerje stojnega vala (angleško: standing-wave ratio ali SWR) oziroma valovitost $\rho=U_{MAX}/U_{MIN}$ kot razmerje med maksimumom in minimumom iste veličine, amplitude napetosti $|U(z)|$ ali amplitude toka $|I(z)|$. Dodatno se v slovenski literaturi za razmerje ρ stojnega vala uporablja tudi dokaj ponesrečen izraz

»neubranost«. Valovitost ρ lahko neposredno izračunamo iz velikosti odbojnosti $|\Gamma|$. V obratni smeri dobimo iz ρ dve različni (recipročni) vrednosti za $|\Gamma|$, za pasivno oziroma aktivno breme.

Valovitost ρ je sicer neimenovano razmerje, ki se lahko giblje v mejah $1 \leq \rho \leq \infty$. Uporaba veličine ρ je vezana na starodavne merilne pripomočke, ki so neposredno opazovali stojni val na merilnem vodu. Danes je bolj smiselno uporabljati velikost odbojnosti $|\Gamma|$ oziroma jo izračunati iz rezultata meritve ρ, če že ne znamo izmeriti celotne kompleksne odbojnosti Γ. Pozor: valovitost ρ sploh ne obstaja na prenosnih vodih z izgubami!

V resničnem prenosnem vodu moramo upoštevati tudi izgube. Kovinski vodniki dodajajo od nič različno zaporedno upornost $R(\omega)$, ki je funkcija frekvence. Nebrezhibna izolacija dodaja vzporedno prevodnost $G(\omega)$, ki je prav tako funkcija frekvence. Pri eni sami frekvenci ω smemo privzeti, da sta upornost vodnikov na enoto dolžine R/l in prevodnost izolacije na enoto dolžine G/l konstanti:



Resnične vode skušamo graditi tako, da bi bile izgube čim manjše. Dielektrike znamo izdelati zelo dobre, kondenzatorji v sodobnem pomnilniku FLASH zadržijo informacijo tudi 100let! Žal nimamo dobrih prevodnikov, tok v

kratko-sklenjeni tuljavi iz bakrene žice se razpolovi že v milisekundi. Celo tok v zanki iz super-prevodnika se razpolovi v enem tednu.

V dobro izdelanem prenosnem vodu smemo zanemariti prevodnost izolacije $G/l \approx 0$. Upornost vodnikov R/l je v zanimivem frekvenčnem področju za telekomunikacije $f \geq 1\,\mathrm{MHz}$ za več velikostnih razredov manjša od induktivne reaktance $\omega L/l$. V večini primerov smemo za karakteristično impedanco Z_K in fazno konstanto β uporabiti kar enostavne izraze za brezizgubni vod. Za slabljenje smemo uporabiti približen izraz $\alpha = (R/l)/(2 Z_K)$.

Na izgubnem prenosnem vodu se spreminjata faza in amplituda odbojnosti $\Gamma(z)$. Napredujoči val $U_N(z)$ je slabljen v smeri $+z$, proti bremenu, odbiti val $U_O(z)$ pa je slabljen v smeri $-z$, proti viru. Velikost odbojnosti $|\Gamma(z)|$ je največja na (pasivnem) bremenu in upada proti viru. Kompleksna odbojnost $\Gamma(z)$ tedaj opiše logaritemsko spiralo v Smithovem diagramu. Na resničnem vodu z majhnimi izgubami naredi logaritemska spirala dosti več zavojev in sama spirala je gostejša, kot je to prikazano na sliki!

Preslikavo impedance bremena Z na Z' , kar vidi vir, določimo podobno kot na brezizgubnem vodu. Najprej iz impedance Z izračunamo odbojnost bremena Γ . Nato odbojnost bremena zavrtimo in oslabimo po spirali v Smithovem diagramu do priključka vira $\Gamma' = \Gamma \cdot e^{-2\alpha l} \cdot e^{-j2\beta l}$. Končno iz preslikane odbojnosti Γ' izračunamo preslikano impedanco Z' , ki jo vidi vir.

Tudi na vodu z izgubami se v primeru neprilagojenega bremena $\Gamma \neq 0$ vzpostavi stojni val kot interferenca napredujočega vala $U_N(z)$ in odbitega vala $U_O(z)$. Stojni val ima minimume in maksimume. Tudi na izgubnem vodu velja, da globeli napetosti sovpadajo s hrbti toka in obratno, globeli toka sovpadajo s hrbti napetosti.

Zaradi različnih smeri slabljenja napredujočega vala $e^{-\alpha z}$ v smeri $+z$ oziroma odbitega vala $e^{+\alpha z}$ v smeri $-z$ so hrbti stojnega vala napetosti (toka) načeloma različno visoki. Prav tako so globeli stojnega vala napetosti (toka) različno globoke. Na vodu z izgubami zato razmerje stojnega vala ρ sploh ni določeno!

Tudi v primeru voda z izgubami pomeni stojni val dodatno energijo, ki niha naprej/nazaj po prenosnem vodu. Višek energije pomeni še dodatne

izgube na vodu z izgubami. Neprilagojeno breme $\Gamma \neq 0$ povzroča še dodatno slabljenje voda. Poleg popačenja signalov zaradi zvonjenja je povečano slabljenje neprilagojenih bremen dodaten razlog za skrbno prilagoditev bremen in virov na karakteristično impedanco voda Z_K !

Rešitev telegrafske enačbe za vod z izgubami v frekvenčnem prostoru nam neposredno daje slabljenje valovanja na enoto dolžine, $\alpha = a_{Np}/l$. V primeru dobro prilagojenega vira in bremena je odbiti val zanemarljiv, slabljenje $\alpha = a_{Np}/l$ predstavlja tedaj celotno slabljenje voda med virom in bremenom. V praksi nas zanima slabljenje v decibelih na enoto dolžine, torej $a_{dB}/l = \alpha \cdot 20/\ln 10$.

Odbojnost Γ lahko merimo v frekvenčnem prostoru s povsem enakim mostičem kot v časovnem prostoru. Seveda moramo imeti primeren vir in primeren voltmeter. Prav od vrste voltmetra je odvisno, kaj lahko z mostičem merimo. Navaden izmenični voltmeter meri samo amplitudo napetosti, torej z njim lahko izmerimo samo velikost odbojnosti $|\Gamma|$. Kazalčni voltmeter meri amplitudo napetosti in razliko v fazi do neke reference (vira), z njim lahko v celoti izmerimo kompleksno odbojnost Γ .

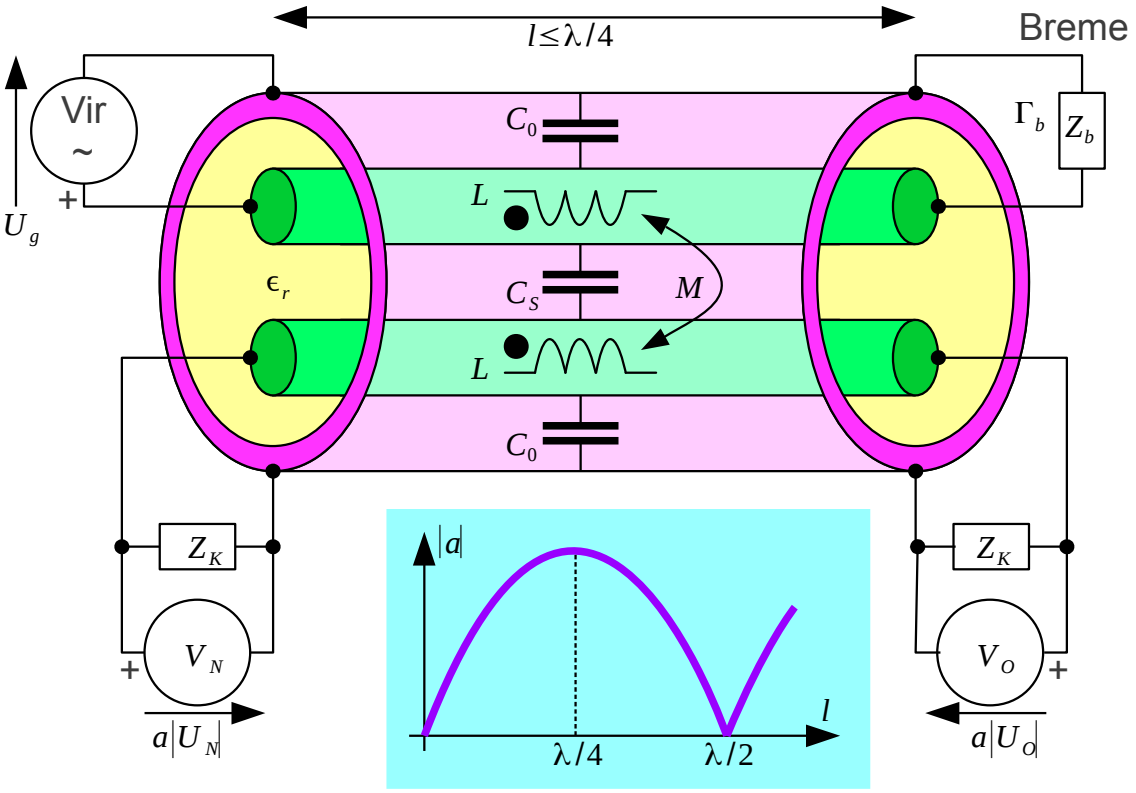
V ožjem frekvenčnem pasu si lahko privoščimo še drugačna vezja oziroma naprave, ki znajo ločiti med napredujočim in odbitim valom ter vnašajo manjše slabljenje signalov od merilnega mostiča. Zelo pogosta naprava za merjenje odbojnosti v radijski tehniki je smerni sklopnik, bolj natančno protismerni sklopnik.

Protismerni sklopnik vsebuje oklop za dva vodnika. Vsak vodnik ima lastno porazdeljeno kapacitivnost C_0 in induktivnost L . Med vodnikoma obstaja magnetni sklop preko porazdeljene medsebojne induktivnosti M in električni sklop preko porazdeljene kapacitivnosti C_S . Dolžina sklopnika je običajno krajša od četrtine valovne dolžine $l \leq \lambda/4$.

Medsebojna kapacitivnost C_S in lastna kapacitivnost sklopljenega (spodnjega) voda C_0 delujeta kot kapacitivni merilni delilnik za napetost U na glavnem (gornjem) vodu. Medsebojna induktivnost M deluje kot tokovni merilni transformator za tok I na glavnem (gornjem) vodu.

Kapacitivni merilni delilnik in tokovni merilni transformator sta v protismernem sklopniku vezana tako, da dobimo vsoto oziroma razliko vzorcev napetosti in toka. Primerno utežena vsota $U + Z_K \cdot I$ je sorazmerna napredujočemu valu. Primerno utežena razlika $U - Z_K \cdot I$ je sorazmerna odbitemu valu.

Medsebojna faza med opisanima magnetnim in električnim sklopom (glej pike pri tuljavah!) je takšna, da se valovanje iz enega (gornjega) vodnika sklaplja v drugi (spodnji) vodnik v obratni smeri potovanja istega valovanja, kar imenujemo protismerni sklop:



Protismerni sklopnik

V smernem sklopniku želimo sklop valovanja samo v eni, znani smeri. V protismernem sklopniku torej želimo samo protismerni sklop in ne želimo sosmernega sklopa. Razmerje med željenim protismernim sklopom in neželjenim sosmernim sklopom imenujemo smernost sklopnika.

Spodnji (sklopljeni) vodnik zaključimo na obeh koncih na njegovo karakteristično impedanco Z_K. Na voltmetrih dobimo napetosti, ki so sorazmerne napredujočemu valu $a|U_N|$ in odbitemu valu $a|U_O|$, kjer je a konstanta sklopnika. Slednja je frekvenčno odvisna in doseže največjo vrednost pri dolžini sklopnika $l=\lambda/4$. Homogen dielektrik omogoča preprosto doseganje visoke smernosti, to je popolno izničenje sosmernega sklopa v protismernem sklopniku v širokem frekvenčnem pasu.

Povsem enako kot pri mostiču je tudi pri smernem sklopniku rezultat meritve odvisen od vrste uporabljenih voltmetrov. Navadna izmenična voltmetra merita samo amplitudi napetosti, z njima lahko torej izmerimo samo

velikost odbojnosti $|\Gamma|$. Kazalčni voltmeter meri amplitudi obeh napetosti ter medsebojno fazo. Z njim lahko v celoti izmerimo kompleksno odbojnost Γ.

* * * * *

6. Vektorji in koordinatni sistemi

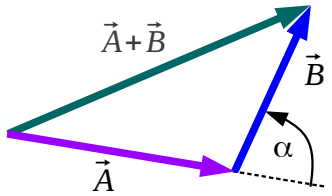
Povsem natančen opis eno-dimenzijske naloge elektrodinamike je izvedljiv s porazdeljenimi tuljavami, kondenzatorji in upori. Vse veličine vključno s tokovi in napetostmi so skalarji. Skalarno veličino opišemo z enim samim številom, realnim oziroma kompleksnim (kazalec) in ustrezno mersko enoto. Prave naloge elektrodinamike so v tri-dimenzijskem prostoru, kjer opis zgolj s skalarnimi veličinami ne zadošča več.

Prave tri-dimenzijske naloge vsebujejo vektorske veličine. Vektor ima velikost in usmerjenost. V treh dimenzijah so to tri neodvisna števila s pripadajočimi merskimi enotami, tri realna oziroma tri kompleksna, če nalogo rešujemo v frekvenčnem prostoru in so komponente kazalci. V izogib zmešnjavi vse vektorske veličine vedno označimo s puščico nad črko (imenom), da jih razlikujemo od skalarnih veličin. Isto črko (oznako) brez puščice najpogosteje (ampak ne vedno!) uporabimo za velikost vektorja $B=|\vec{B}|$.

V nekateri (predvsem anglosaški) literaturi vektorje označujejo z mastnimi črkami, na primer $\boldsymbol{B}=\vec{B}$, da se izognejo nadpisanim puščicam. Takšen zapis postane silno nepregleden pri malih črkah, na primer $\boldsymbol{v}=\vec{v}$. Povrhu se isto črko pogosto uporablja za različne veličine, na primer v elektrodinamiki $\boldsymbol{A}=\vec{A}$ (vektor) za vektorski potencial z merskimi enotami $[\mathrm{Vs/m}]$ oziroma A (skalar) za površino z merskimi enotami $[\mathrm{m}^2]$. Končno je zelo smiselno, da učbenik uporablja enake oznake kot pri pisanju z roko na tablo oziroma v zvezek.

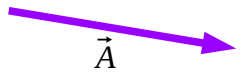
Fizikalne naloge zahtevajo različne računske operacije z vektorji: izračun dolžine (velikosti) vektorja, seštevanje (odštevanje) vektorjev ter dve različni množenji vektorjev, skalarni in vektorski produkt:

Seštevanje vektorjev



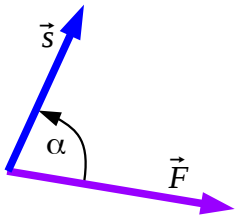
$$|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2+2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\alpha}$$

Velikost vektorja



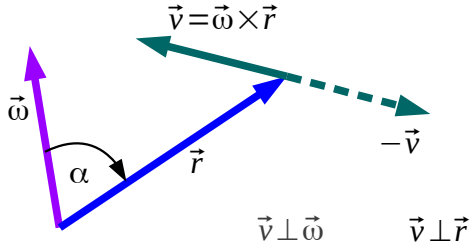
$$|\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$$

Skalarni produkt



$$W=\vec{F}\cdot\vec{s}=\vec{s}\cdot\vec{F}=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\alpha$$

Vektorski produkt



$$|\vec{v}|=|\vec{\omega}\times\vec{r}|=|\vec{\omega}||\vec{r}|\sin\alpha$$

$\vec{r}\times\vec{\omega}=-\vec{v}=-\vec{\omega}\times\vec{r}$ Desni vijak!

Povsem enako kot skalarne veličine moremo med sabo seštevati le vektorje, ki imajo enake merske enote. Velikost vsote dobimo iz kosinusnega izreka, kjer upoštevamo kot α med vektorjema. Smer vsote je vedno med smermi obeh vektorjev, ki smo ju sešteli. Zaporedje vektorjev je pri seštevanju nepomembno.

Skalarni produkt (označen s piko, angleško: dot product) srečamo v številnih fizikalnih nalogah. Na primer, opravljeno delo W je skalar, bolj točno skalarni produkt vektorja sile $\vec{F}$ in vektorja poti $\vec{s}$. Vrednost skalarnega produkta določa vmesni kot α. Skalarni produkt je lahko tudi nič pri $\alpha=\pi/2$ ali celo negativen pri $\alpha>\pi/2$. Pri skalarnem produktu smemo oba vektorja med sabo zamenjati, ker to ne vpliva na rezultat. Skalarni produkt vektorja samega s sabo največkrat uporabimo za izračun velikosti vektorja $|\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$.

Vektorski produkt (označen s križcem, angleško: cross product) srečamo v vseh tri-dimenzijskih nalogah, ki vsebujejo vrtenje, vključno z nalogami magnetike. Na primer, vektorski produkt vektorja krožne frekvence $\vec{\omega}$ in vektorja položaja delca $\vec{r}$ daje vektor hitrosti delca $\vec{v}$. Od vektorskega produkta zahtevamo, da je pravokoten na oba zmnožena vektorja in sorazmeren sinusu vmesnega kota α.

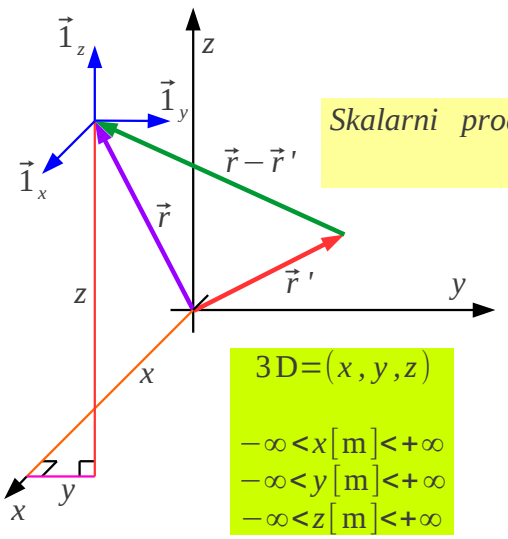
Vektor krožne frekvence $\vec{\omega}$ kaže vzdolž osi vrtenja. Z upoštevanjem zahteve za pravokotnost ima vektorski produkt $\vec{v}$ še vedno dve možni smeri. Smer vektorskega produkta $\vec{v}$ po definiciji izbiramo po pravilu desnega vijaka. Isto pravilo zahteva, da vektorski produkt zamenja predznak, če zmnožena vektorja med sabo zamenjamo.

Opis fizikalne naloge, ki vsebuje vektorje, je lahko zelo zahteven. Težko je že določiti kot α med dvema vektorjema. Še težje je določiti, kam kaže vsota dveh vektorjev. Najbolj zoprna naloga je vsekakor določanje smeri vektorskega produkta.

V izogibanje zmešnjavi pri opisu fizikalne naloge (elektrodinamike) je smiselno uvesti koordinatni sistem. Primeren koordinatni sistem naj bi imel naslednje lastnosti, da poenostavi opis in računanje z vektorji:
1) tri dimenzije (3D),
2) pravokotnost med koordinatnimi osmi (pravokotni) in
3) vgrajeno pravilo desnega vijaka (desnosučni).

Koordinatni sistem je izumil francoski matematik René Descartes leta 1637, da je z njim povezal algebro in geometrijo. Najpreprostejši koordinatni sistem, ki ustreza gornjim zahtevam, je tri-dimenzijski kartezični (latinizirano ime Descartes) koordinatni sistem:

Kartezični koordinatni sistem



$3\mathrm{D}=(x,y,z)$

$-\infty<x[\mathrm{m}]<+\infty$
$-\infty<y[\mathrm{m}]<+\infty$
$-\infty<z[\mathrm{m}]<+\infty$

Komponente $\vec{A}=(A_x,A_y,A_z)=\vec{1}_x A_x+\vec{1}_y A_y+\vec{1}_z A_z$

$A_x=\vec{1}_x\cdot\vec{A} \quad A_y=\vec{1}_y\cdot\vec{A} \quad A_z=\vec{1}_z\cdot\vec{A}$

Skalarni produkt $\vec{A}\cdot\vec{B}=(\vec{1}_x A_x+\vec{1}_y A_y+\vec{1}_z A_z)\cdot(\vec{1}_x B_x+\vec{1}_y B_y+\vec{1}_z B_z)$

$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_x B_x+A_y B_y+A_z B_z$

Velikost $|\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$

$|\vec{r}|=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Razdalja $|\vec{r}-\vec{r}\,'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$

Vektorski produkt

$\vec{A}\times\vec{B}=(\vec{1}_x A_x+\vec{1}_y A_y+\vec{1}_z A_z)\times(\vec{1}_x B_x+\vec{1}_y B_y+\vec{1}_z B_z)$

$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{1}_x(A_y B_z-A_z B_y)+$
$+\vec{1}_y(A_z B_x-A_x B_z)+\vec{1}_z(A_x B_y-A_y B_x)$

Smerniki $1=\vec{1}_x\cdot\vec{1}_x=\vec{1}_y\cdot\vec{1}_y=\vec{1}_z\cdot\vec{1}_z$

Pravokotni $\vec{1}_x\perp\vec{1}_y\perp\vec{1}_z\perp\vec{1}_x \quad 0=\vec{1}_x\cdot\vec{1}_y=\vec{1}_y\cdot\vec{1}_z=\vec{1}_z\cdot\vec{1}_x$

Desnosučni $\vec{1}_z=\vec{1}_x\times\vec{1}_y \quad \vec{1}_x=\vec{1}_y\times\vec{1}_z \quad \vec{1}_y=\vec{1}_z\times\vec{1}_x$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

V kartezičnem koordinatnem sistemu so koordinatne osi x , y in z ravne in med sabo pravokotne. Vse tri koordinate imajo mersko enoto razdalje, torej meter $[\mathrm{m}]$ v sistemu merskih enot MKSA. Pravilo desnega vijaka zagotavlja pisanje koordinat v dogovorjenem vrstnem redu, torej (x, y, z) .

Zelo koristen pripomoček vsakega koordinatnega sistema so smerniki. To so enotski vektorji, ki kažejo v smereh koordinatnih osi. V izogibanje zmešnjavi razkošja oznak uporabljamo za smernike številko ena, opremljeno s puščico vektorja in indeksom koordinate, kateri pripada. Na primer, smernik $\vec{1}_x$ je enotski vektor v smeri koordinate x .

Smerniki so enotski vektorji, torej $\vec{1}_x \cdot \vec{1}_x = 1$. Smerniki so v pravokotnem koordinatnem sistemu med sabo pravokotni. Zapis $\vec{1}_x \perp \vec{1}_y$ je torej povsem enakovreden $\vec{1}_x \cdot \vec{1}_y = 0$. Pravilo desnega vijaka zapišemo z vektorskim produktom smernikov $\vec{1}_z = \vec{1}_x \times \vec{1}_y$.

Posebnost kartezičnega koordinatnega sistema je, da so smerniki konstantni vektorji. To pomeni, da v katerikoli točki prostora vsi trije smerniki kartezičnega koordinatnega sistema vedno kažejo v iste tri smeri. V krivočrtnih koordinatnih sistemih, ki so prav tako 3D, pravokotni in desnosučni, to ne velja! Konstantni smerni vektorji in koordinate z merskimi enotami razdalje omogočajo preprost izračun razdalj v kartezičnem koordinatnem sistemu.

S pomočjo smernikov lahko katerikoli vektor razstavimo v treh dimenzijah v tri skalarne komponente. Obratno iz treh skalarnih komponent s pomočjo smernikov dobimo spet prvotni vektor. Zapis vektorja po komponentah znatno poenostavlja računanje z vektorji. Seštevanje dveh vektorjev gre preprosto tako, da seštejemo istoležne komponente.

Skalarni produkt dveh vektorjev razvijemo v devet produktov komponent. Od teh je v pravokotnem koordinatnem sistemu šest produktov enako nič! V skalarnem produktu so različni od nič le produkti istoležnih komponent, ki jih preprosto seštejemo.

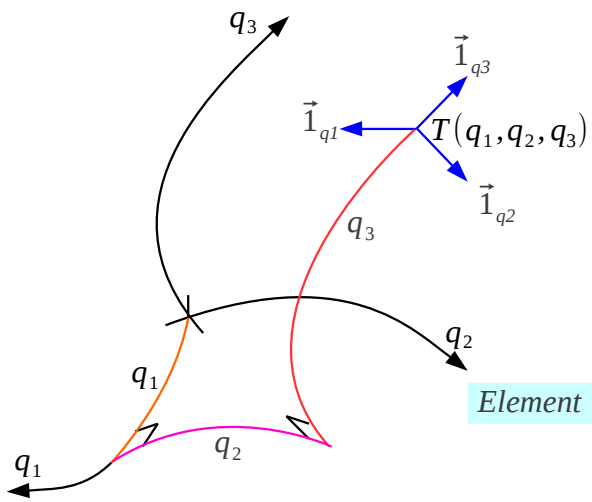
Tudi vektorski produkt dveh vektorjev razvijemo v devet produktov komponent. Od teh so v vektorskem produktu trije produkti istoležnih komponent enaki nič. Ostalih šest od nič različnih produktov komponent izračunamo s pomočjo pravila desnega vijaka za smernike. Navidez kompliciran končni rezultat poenostavimo z zapisom vektorskega produkta v

obliki determinante 3×3 , ki ima v gornji vrstici smernike, v srednji vrstici komponente prvega vektorja in v spodnji vrstici komponente drugega vektorja.

Žal kartezične koordinate (x,y,z) niso najbolj primerne za reševanje nekaterih nalog niti niso v izbrani nalogi samoumevne. Marsikatero nalogo preprosteje opišemo v krivočrtnem koordinatnem sistemu s splošnimi koordinatami q_1 , q_2 in q_3 . Krivočrtni tri-dimenzijski koordinatni sistem (q_1,q_2,q_3) je sicer pravokoten in desnosučen, vendar koordinatne osi mogoče niso vedno vse ravne niti koordinate nimajo nujno vse merskih enot razdalje.

Smernik ima smer tangente na pripadajočo koordinatno os krivočrtnega koordinatnega sistema. Če je koordinatna os ukrivljena oziroma se njena smer spreminja v prostoru, se spreminja smer tangente. Smernik takrat ni konstanten vektor, pač pa je funkcija koordinat (q_1,q_2,q_3) ! Poljuben 3D krivočrtni koordinatni sistem (q_1,q_2,q_3) ima smernike $\vec{1}_{q1}$, $\vec{1}_{q2}$ in $\vec{1}_{q3}$, ki so med sabo pravokotni, vrstni red pa določa pravilo desnega vijaka:

Krivočrtni koordinatni sistem



$3D=(q_1,q_2,q_3)$

Element dolžine $dl=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$

Povezava s kartezičnimi

$$x=x(q_1,q_2,q_3)$$
$$y=y(q_1,q_2,q_3)$$
$$z=z(q_1,q_2,q_3)$$

$$dl_1=\left(\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}\right)dq_1=h_1\,dq_1$$

Element površine $dA=dl_1\,dl_2=h_1\,h_2\,dq_1\,dq_2$

Element prostornine $dV=dl_1\,dl_2\,dl_3=h_1\,h_2\,h_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3$

$$h_1=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}$$

$$h_2=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}$$

$$h_3=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}$$

Enotni vektorji $1=\vec{1}_{q1}\cdot\vec{1}_{q1}=\vec{1}_{q2}\cdot\vec{1}_{q2}=\vec{1}_{q3}\cdot\vec{1}_{q3}$

Pravokotni $\vec{1}_{q1}\perp\vec{1}_{q2}\perp\vec{1}_{q3}\perp\vec{1}_{q1}$ $\quad 0=\vec{1}_{q1}\cdot\vec{1}_{q2}=\vec{1}_{q2}\cdot\vec{1}_{q3}=\vec{1}_{q3}\cdot\vec{1}_{q1}$

Desnosučni $\vec{1}_{q3}=\vec{1}_{q1}\times\vec{1}_{q2}$ $\quad \vec{1}_{q1}=\vec{1}_{q2}\times\vec{1}_{q3}$ $\quad \vec{1}_{q2}=\vec{1}_{q3}\times\vec{1}_{q1}$

V krivočrtnem koordinatnem sistemu se zaplete pri izračunu katerekoli

razdalje, celo diferencialno majhnih premikov. Za izračun poljubne razdalje moramo krivočrtne koordinate (q_1, q_2, q_3) največkrat pretvoriti v kartezične koordinate (x, y, z). Pri majhnih premikih pogosto smemo ubrati bližnjico, primeren faktor, ki majhno spremembo ene od krivočrtnih koordinat pretvori v pripadajočo razdaljo.

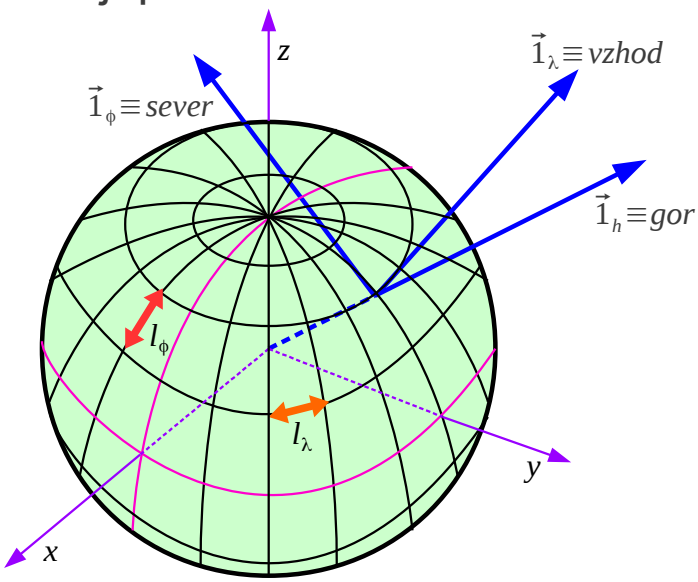
Izračun faktorja pretvorbe majhne spremembe v razdaljo ni vedno preprost oziroma samoumeven. Francoski matematik Gabriel Lamé je pri reševanju nalog v eliptičnih koordinatnih sistemih leta 1859 poiskal splošno pot do faktorjev pretvorbe za diferencialno majhne premike. Laméjevi koeficienti (angleško: scale factors) h_1, h_2 in h_3 opisujejo pretvorbo diferencialno majhne spremembe ene od koordinat, na primer dq_1 v pripadajočo razdaljo $dl_1 = h_1 dq_1$.

Laméjev ali metrični koeficient h_1 izračunamo iz delnih odvodov vseh treh kartezičnih koordinat $\partial x / \partial q_1$, $\partial y / \partial q_1$ in $\partial z / \partial q_1$ po pripadajoči krivočrtni koordinati. Premik po eni krivočrtni koordinati načeloma povzroči premike po vseh treh kartezičnih koordinatah. Celotno razdaljo premika dobimo s Pitagorovim izrekom. Če izpostavimo dq_1, je preostanek ravno iskani Laméjev koeficient h_1.

V diferencialno majhnem elementu dolžine dl nastopa en sam Laméjev koeficient. V diferencialno majhnem elementu površine dA nastopata dva Laméjeva koeficienta. V diferencialno majhnem elementu prostornine dV nastopajo vsi trije Laméjevi koeficienti h_1, h_2 in h_3.

Najbolj poljuden primer 3D pravokotnih krivočrtnih koordinat so zemljepisne koordinate: zemljepisna dolžina λ, zemljepisna širina ϕ in nadmorska višina h. Zemljepisno dolžino in širino merimo v ločnih stopinjah $[^{\circ}]$, minutah $[']$ in sekundah $['']$, nadmorsko višino pa v kilometrih $[\mathrm{km}]$ oziroma metrih $[\mathrm{m}]$. Smernik $\vec{1}_{\lambda}$ kaže na vzhod, smernik $\vec{1}_{\phi}$ kaže na sever in smernik $\vec{1}_{h}$ kaže gor:

Zemljepisni koordinatni sistem



Pretvorba $(\lambda,\phi,h) \rightarrow (x,y,z)$

$$x=(h+R_Z)\cos\left(\frac{\pi}{180^\circ}\lambda\right)\cos\left(\frac{\pi}{180^\circ}\phi\right)$$
$$y=(h+R_Z)\sin\left(\frac{\pi}{180^\circ}\lambda\right)\cos\left(\frac{\pi}{180^\circ}\phi\right)$$
$$z=(h+R_Z)\sin\left(\frac{\pi}{180^\circ}\phi\right)$$
$$R_Z \approx 6366\,\mathrm{km}$$

Laméjevi koeficienti

$$h_\lambda=\frac{\pi(h+R_Z)}{180^\circ}\cos\left(\frac{\pi}{180^\circ}\phi\right)$$
$$h_\phi=\frac{\pi(h+R_Z)}{180^\circ}$$
$$h_h=1$$

$3\,\mathrm{D}=(\lambda,\phi,h)$

$0^\circ \le \lambda[^\circ] < 360^\circ$
$-90^\circ \le \phi[^\circ] \le 90^\circ$
$-R_Z \le h[\mathrm{km}] < +\infty$

Pravokotni $\vec{1}_\lambda \perp \vec{1}_\phi \perp \vec{1}_h \perp \vec{1}_\lambda$

Desnosučni $\vec{1}_h = \vec{1}_\lambda \times \vec{1}_\phi$

Zgled: $\lambda=330^\circ$ $\phi=45^\circ$ $h=0\,\mathrm{km}$

$h_\lambda=78.6\,\mathrm{km}/^\circ$
$h_\phi=111.1\,\mathrm{km}/^\circ$
$h_h=1$
$\Delta\lambda=20^\circ \rightarrow l_\lambda=h_\lambda\Delta\lambda=1571\,\mathrm{km}$
$\Delta\phi=20^\circ \rightarrow l_\phi=h_\phi\Delta\phi=2222\,\mathrm{km}$

Pretvorbo zemljepisnih koordinat (λ,ϕ,h) v kartezične (x,y,z) poenostavimo tako, da privzamemo, da je Zemlja krogla s povprečnim polmerom $R_Z \approx 6366\,\mathrm{km}$. Pri pretvorbi ne smemo pozabiti na merske enote zemljepisne dolžine in širine, kjer je treba stopinje $[^\circ]$ najprej pretvoriti v radiane $[\mathrm{rd}]$ za trigonometrijske funkcije $\sin$ in $\cos$. Iz znane povezave s kartezičnim koordinatnim sistemom lahko izračunamo Laméjeve koeficiente h_λ, h_ϕ in h_h.

V krivočrtnem koordinatnem sistemu so smerniki funkcija koordinat. Na primer, smernik $\vec{1}_h \equiv gor$ kaže v osrednji Evropi drugam kot na Kitajskem, v Novi Zelandiji pa skoraj v nasprotno smer kot v osrednji Evropi.

Podobno so lahko funkcija krivočrtnih koordinat tudi nekateri oziroma vsi Laméjevi koeficienti. Prekooceanska plovba ($h=0\,\mathrm{km}$) po poldnevniku ima konstanten Laméjev koeficient zemljepisne širine $h_\phi=111.1\,\mathrm{km}/^\circ$. Laméjev koeficient zemljepisne dolžine h_λ je odvisen od zemljepisne širine ϕ, saj so vzporedniki različno dolgi. Pri zemljepisni širini $\phi=45^\circ$ znaša $h_\lambda=78.6\,\mathrm{km}/^\circ$.

Med premikanjem po kateremkoli poldnevniku za $\Delta\phi=20^\circ$ prepluje

ladja $l_\phi = 2222\,\mathrm{km}$ oziroma natančno $l_\phi = 20^\circ \cdot 60\,\mathrm{nm}/^\circ = 1200\,\mathrm{nm}$, saj je navtična milja definirana kot ena ločna minuta na poldnevniku. Pripadajoči Laméjev koeficient znaša $h_\phi = 1\,\mathrm{nm}/' = 1.852\,\mathrm{km}/'$ zapisan na ločno minuto. Med plovbo po vzporedniku $45^\circ\mathrm{N}$ za $\Delta\lambda = 20^\circ$ naredi ladja samo $l_\lambda = 1571\,\mathrm{km}$!

V elektrodinamiki izbiramo koordinatne sisteme tako, da je računanje čimbolj enostavno. Povsem jasno želimo tri dimenzije, pravokotnost in desnosučnost. Vse kotne koordinate zato navajamo v radianih $[\mathrm{rd}]$, da so odvodi in integrali kotnih funkcij čimbolj preprosti. Iz podobnega razloga navajamo eksponentne koordinate v logaritemskih enotah Neprih $[\mathrm{Np}]$, da so odvodi in integrali hiperboličnih funkcij čimbolj preprosti.

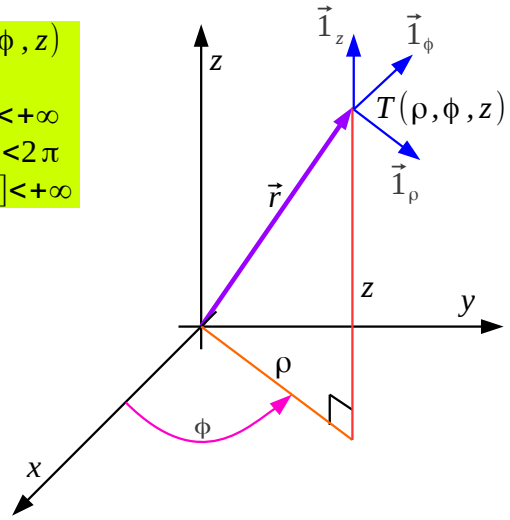
Valjni koordinatni sistem (ρ, ϕ, z) je smiselna izbira za obravnavo vodnikov krožnega prereza, koaksialnih kablov, kovinskih valovodov krožnega prereza in dielektričnih valovodov krožnega prereza (svetlobno vlakno). Valjne koordinate vključujejo oddaljenost ρ od kartezične osi z , kot ϕ merjen od kartezične osi x do projekcije na ravnino xy ter višino z nad ravnino xy , ki povsem ustreza enako poimenovani kartezični koordinati z .

Oddaljenost ρ od osi zapisujemo v metrih $[\mathrm{m}]$ in vedno vzamemo pozitivno, $0 \le \rho < +\infty$. Kot ϕ zapisujemo v radianih $[\mathrm{rd}]$ in se lahko giblje v območju $0 \le \phi < 2\pi$. Pozor, koordinata ϕ valjnega koordinatnega sistema nima popolnoma nobene povezave z istoimensko koordinato ϕ zemljepisnega koordinatnega sistema! Povsem enako kot v kartezičnem koordinatnem sistemu tretjo koordinato z zapisujemo v metrih $[\mathrm{m}]$ in za njeno vrednost ni posebnih omejitev:

Valjni koordinatni sistem

$3D=(\rho,\phi,z)$

$0\le\rho[m]<+\infty$
$0\le\phi[rd]<2\pi$
$-\infty<z[m]<+\infty$



Pretvorba $(\rho,\phi,z)\rightarrow(x,y,z)$

$$x=\rho\cos\phi$$
$$y=\rho\sin\phi$$
$$z=z$$
$$\vec{1}_x=\vec{1}_\rho\cos\phi-\vec{1}_\phi\sin\phi$$
$$\vec{1}_y=\vec{1}_\rho\sin\phi+\vec{1}_\phi\cos\phi$$
$$\vec{1}_z=\vec{1}_z$$

Laméjevi koeficienti

$$h_\rho=1$$
$$h_\phi=\rho$$
$$h_z=1$$

Pretvorba $(x,y,z)\rightarrow(\rho,\phi,z)$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\phi=\arctan(y/x)\quad(kvadrant?)$$
$$z=z$$
$$\vec{1}_\rho=\vec{1}_x\cos\phi+\vec{1}_y\sin\phi$$
$$\vec{1}_\phi=-\vec{1}_x\sin\phi+\vec{1}_y\cos\phi$$
$$\vec{1}_z=\vec{1}_z$$

Smerniki $1=\vec{1}_\rho\cdot\vec{1}_\rho=\vec{1}_\phi\cdot\vec{1}_\phi=\vec{1}_z\cdot\vec{1}_z$

Pravokotni $\vec{1}_\rho\perp\vec{1}_\phi\perp\vec{1}_z\perp\vec{1}_\rho\quad 0=\vec{1}_\rho\cdot\vec{1}_\phi=\vec{1}_\phi\cdot\vec{1}_z=\vec{1}_z\cdot\vec{1}_\rho$

Desnosučni $\vec{1}_z=\vec{1}_\rho\times\vec{1}_\phi\quad\vec{1}_\rho=\vec{1}_\phi\times\vec{1}_z\quad\vec{1}_\phi=\vec{1}_z\times\vec{1}_\rho$

V valjnem koordinatnem sistemu (ρ,ϕ,z) sta koordinatni osi ρ in z ravni (premici). Le koordinatna os ϕ je ukrivljena (krožnica). Laméjev koeficient $h_\phi=\rho$ je edini, ki je različen od enote, da radiane pretvori v dolžinske enote. Ostala dva Laméjeva koeficienta sta enaka enoti: $h_\rho=h_z=1$.

Pravilo desnega vijaka določa privzeti vrstni red koordinat (ρ,ϕ,z) oziroma vektorski produkt smernikov $\vec{1}_z=\vec{1}_\rho\times\vec{1}_\phi$. V valjnem koordinatnem sistemu je edino smernik $\vec{1}_z$ konstanten vektor. Smernika $\vec{1}_\rho$ in $\vec{1}_\phi$ spreminjata smer v prostoru , bolj točno se oba vrtita s koordinato ϕ .

Pretvorba valjnih koordinat (ρ,ϕ,z) v kartezične (x,y,z) je preprosta. Pretvorba v obratni smeri iz kartezičnih (x,y,z) v valjne (ρ,ϕ,z) naleti na težavo pri izračunu ϕ , saj funkcija $\arctan(y/x)$ daje rezultat v območju od $-\pi/2$ do $+\pi/2$. Pravilen kvadrant kota ϕ je torej treba še dodatno določiti iz znanih x in y !

Povezavo med smerniki valjnega in kartezičnega koordinatnega sistema poiščemo tako, da iskani smernik razstavimo na komponente. Na primer, pri iskanju smernika $\vec{1}_\rho=\vec{1}_x(\vec{1}_x\cdot\vec{1}_\rho)+\vec{1}_y(\vec{1}_y\cdot\vec{1}_\rho)+\vec{1}_z(\vec{1}_z\cdot\vec{1}_\rho)$

potrebujemo projekcije $\vec{1}_x \cdot \vec{1}_\rho = \cos\phi$, $\vec{1}_y \cdot \vec{1}_\rho = \sin\phi$ in $\vec{1}_z \cdot \vec{1}_\rho = 0$. Smernik $\vec{1}_z$ poznamo, saj je isti v obeh koordinatnih sistemih. Preostalo neznanko, smernik $\vec{1}_\phi = \vec{1}_z \times \vec{1}_\rho$ poiščemo po pravilu desnega vijaka.

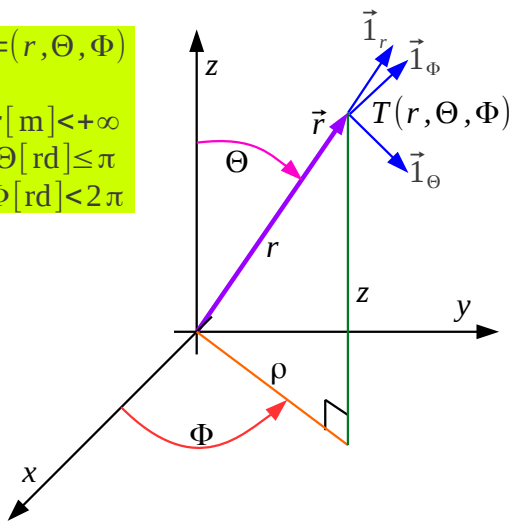
Krogelni koordinatni sistem (r, Θ, Φ) je uporaben v vseh nalogah anten, sevanja in razširjanja elektromagnetnih valov. Krogelne koordinate vključujejo oddaljenost r od koordinatnega izhodišča, polarno razdaljo zapisano s kotom Θ ter zemljepisno dolžino zapisano s kotom Φ , ki z izjemo drugačnih merskih enot povsem ustreza zemljepisni dolžini λ zemljepisnih koordinat.

Oddaljenost r od koordinatnega izhodišča zapisujemo v metrih $[\mathrm{m}]$ in je vedno nenegativna, $0 \le r < +\infty$. Polarno razdaljo Θ merimo od severnega tečaja v radianih $[\mathrm{rd}]$ in se lahko giblje v območju $0 \le \Theta \le \pi$ vse do južnega tečaja, kjer doseže vrednost $\Theta = \pi$. Zemljepisno dolžino Φ merimo od kartezične osi x do projekcije na ravnino xy v radianih $[\mathrm{rd}]$ in se lahko giblje v območju $0 \le \Phi < 2\pi$:

Krogelni koordinatni sistem

$3\mathrm{D} = (r, \Theta, \Phi)$

$0 \le r[\mathrm{m}] < +\infty$
$0 \le \Theta[\mathrm{rd}] \le \pi$
$0 \le \Phi[\mathrm{rd}] < 2\pi$



Pretvorba $(r, \Theta, \Phi) \rightarrow (x, y, z)$

$$x = r \sin\Theta \cos\Phi$$
$$y = r \sin\Theta \sin\Phi$$
$$z = r \cos\Theta$$
$$\vec{1}_x = \vec{1}_r \sin\Theta \cos\Phi + \vec{1}_\Theta \cos\Theta \cos\Phi - \vec{1}_\Phi \sin\Phi$$
$$\vec{1}_y = \vec{1}_r \sin\Theta \sin\Phi + \vec{1}_\Theta \cos\Theta \sin\Phi + \vec{1}_\Phi \cos\Phi$$
$$\vec{1}_z = \vec{1}_r \cos\Theta - \vec{1}_\Theta \sin\Theta$$

Pretvorba $(x, y, z) \rightarrow (r, \Theta, \Phi)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\Theta = \arccos\left(z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$
$$\Phi = \arctan(y/x) \quad (\textit{kvadrant ?})$$
$$\vec{1}_r = \vec{1}_x \sin\Theta \cos\Phi + \vec{1}_y \sin\Theta \sin\Phi + \vec{1}_z \cos\Theta$$
$$\vec{1}_\Theta = \vec{1}_x \cos\Theta \cos\Phi + \vec{1}_y \cos\Theta \sin\Phi - \vec{1}_z \sin\Theta$$
$$\vec{1}_\Phi = -\vec{1}_x \sin\Phi + \vec{1}_y \cos\Phi$$

Smerniki $1 = \vec{1}_r \cdot \vec{1}_r = \vec{1}_\Theta \cdot \vec{1}_\Theta = \vec{1}_\Phi \cdot \vec{1}_\Phi$

Pravokotni $\vec{1}_r \perp \vec{1}_\Theta \perp \vec{1}_\Phi \perp \vec{1}_r \quad 0 = \vec{1}_r \cdot \vec{1}_\Theta = \vec{1}_\Theta \cdot \vec{1}_\Phi = \vec{1}_\Phi \cdot \vec{1}_r$

Desnosučni $\vec{1}_\Phi = \vec{1}_r \times \vec{1}_\Theta \quad \vec{1}_r = \vec{1}_\Theta \times \vec{1}_\Phi \quad \vec{1}_\Theta = \vec{1}_\Phi \times \vec{1}_r$

Laméjevi koeficienti

$$h_r = 1$$
$$h_\Theta = r$$
$$h_\Phi = r \sin\Theta$$

V krogelnem koordinatnem sistemu (r, Θ, Φ) je edino koordinatna os r ravna (poltrak). Ostali dve koordinatni osi sta ukrivljeni (krožnici): Θ

raste po poldnevnikih proti južnemu tečaju, Φ raste po vzporednikih na vzhod. Laméjev koeficient $h_r=1$ je edini enak enoti. Ostala dva Laméjeva koeficienta, $h_\Theta=r$ in $h_\Phi=r\sin\Theta$, sta različna od enote in radiane pretvarjata v dolžinske enote.

Pravilo desnega vijaka določa privzeti vrstni red koordinat (r,Θ,Φ) oziroma vektorski produkt smernikov $\vec{1}_\Phi=\vec{1}_r\times\vec{1}_\Theta$. V krogelnem koordinatnem sistemu vsi trije smerniki $\vec{1}_r$, $\vec{1}_\Theta$ in $\vec{1}_\Phi$ spreminjajo smer v prostoru , bolj točno se obračajo s polarno razdaljo Θ oziroma zemljepisno dolžino Φ .

Pretvorba krogelnih koordinat (r,Θ,Φ) v kartezične (x,y,z) je preprosta. Pretvorba v obratni smeri iz kartezičnih (x,y,z) v krogelne (r,Θ,Φ) naleti na težavo pri izračunu Φ , saj funkcija $\arctan(y/x)$ daje rezultat v območju od $-\pi/2$ do $+\pi/2$. Pravilen kvadrant kota Φ je torej treba še dodatno določiti iz znanih x in y ! Povrhu lahko postane izračun polarne razdalje Θ preko funkcije $\arccos$ zelo nenatančen v bližini tečajev!

Zemljepisna dolžina krogelnega koordinatnega sistema je povsem enaka $\Phi(krogla)=\phi(valj)$ koordinati valjnega koordinatnega sistema. Tudi pripadajoča smerna vektorja sta povsem enaka $\vec{1}_\Phi(krogla)=\vec{1}_\phi(valj)$. Različni oznaki, veliko in malo grško črko »Phi« uporabljamo le zato, da strogo ločimo med krogelnimi koordinatami (r,Θ,Φ) in valjnimi koordinatami (ρ,ϕ,z) .

Povezavo med smerniki krogelnega in kartezičnega koordinatnega sistema poiščemo tako, da iskani smernik razstavimo na komponente. Na primer, pri iskanju smernika $\vec{1}_r=\vec{1}_x(\vec{1}_x\cdot\vec{1}_r)+\vec{1}_y(\vec{1}_y\cdot\vec{1}_r)+\vec{1}_z(\vec{1}_z\cdot\vec{1}_r)$ potrebujemo projekcije $\vec{1}_x\cdot\vec{1}_r=\sin\Theta\cos\Phi$, $\vec{1}_y\cdot\vec{1}_r=\sin\Theta\sin\Phi$ in $\vec{1}_z\cdot\vec{1}_r=\cos\Theta$. Smernik $\vec{1}_\Phi=\vec{1}_\phi(valj)=-\vec{1}_x\sin\Phi+\vec{1}_y\cos\Phi$ poznamo, saj je isti vektor kot v valjnem koordinatnem sistemu. Preostalo neznanko, smernik $\vec{1}_\Theta=\vec{1}_\Phi\times\vec{1}_r$ poiščemo po pravilu desnega vijaka.

Opisani poenostavljeni zemljepisni koordinatni sistem je podoben krogelnemu z nekaj preprostimi pretvorbami koordinat. Nadmorski višini prištejemo polmer Zemlje $h(zemljepis)+R_Z=r(krogla)$. Zemljepisno dolžino samo pretvorimo v radiane $\lambda(zemljepis)\cdot\pi/180^\circ=\Phi(krogla)$. Zemljepisno širino pretvorimo v radiane in odštejemo od pravega kota $\pi/2-\phi(zemljepis)\cdot\pi/180^\circ=\Theta(krogla)$, da dobimo pripadajočo polarno

razdaljo.

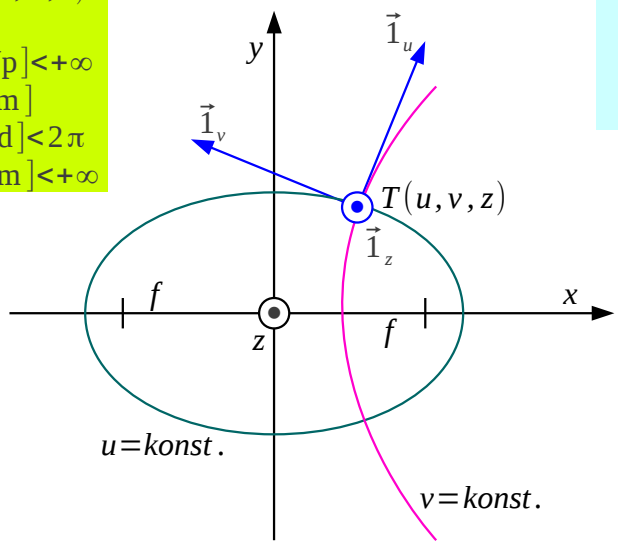
Valjno-eliptični koordinatni sistem (u,v,z) je smiselna izbira za obravnavo osamljenih trakastih vodnikov oziroma kovinskega valovoda eliptičnega prereza. Valjno-eliptične koordinate vključujejo (eksponentno) oddaljenost u od goriščnega traku širine $2\mathrm{f}$, kot v za opis zasuka v ravnini xy ter višino z nad ravnino xy, ki povsem ustreza enako poimenovani kartezični koordinati z.

Oddaljenost u od osi zapisujemo v logaritemskih enotah $[\mathrm{Np}]$ in vedno vzamemo nenegativno, $0 \le u < +\infty$. Dejanske izmere dobimo s pomočjo privzete goriščne razdalje f, ki ima merske enote dolžine $[\mathrm{m}]$. Kot v zapisujemo v radianih $[\mathrm{rd}]$ in se lahko giblje v območju $0 \le v < 2\pi$. Povsem enako kot v kartezičnem koordinatnem sistemu tretjo koordinato z zapisujemo v metrih $[\mathrm{m}]$ in za njeno vrednost ni posebnih omejitev:

Valjno-eliptični koordinatni sistem

$3\mathrm{D}=(u,v,z)$

$0 \le u[\mathrm{Np}] < +\infty$
$f[\mathrm{m}]$
$0 \le v[\mathrm{rd}] < 2\pi$
$-\infty < z[\mathrm{m}] < +\infty$



$(u,v,z) \rightarrow (x,y,z)$

$x = f \cosh u \cos v$
$y = f \sinh u \sin v$
$z = z$

Približek $u \gg 1$
$(u,v,z) \rightarrow (\rho,\phi,z)$
$\rho \approx \frac{f}{2} e^u$
$\phi \approx v$
$z = z$

Laméjevi koeficienti

$h_u = f\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}$
$h_v = f\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}$
$h_z = 1$

$\vec{1}_u = \vec{1}_x(\vec{1}_x \cdot \vec{1}_u) + \vec{1}_y(\vec{1}_y \cdot \vec{1}_u) + \vec{1}_z(\vec{1}_z \cdot \vec{1}_u)$

$$\vec{1}_x \cdot \vec{1}_u = \frac{dx_u}{dl_u} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} du}{h_u du} = \frac{\sinh u \cos v}{\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}$$

$$\vec{1}_u = \frac{\vec{1}_x \sinh u \cos v + \vec{1}_y \cosh u \sin v}{\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}$$

$$\vec{1}_v = \frac{-\vec{1}_x \cosh u \sin v + \vec{1}_y \sinh u \cos v}{\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}$$

Smerniki $1 = \vec{1}_u \cdot \vec{1}_u = \vec{1}_v \cdot \vec{1}_v = \vec{1}_z \cdot \vec{1}_z$

Pravokotni $\vec{1}_u \perp \vec{1}_v \perp \vec{1}_z \perp \vec{1}_u \quad 0 = \vec{1}_u \cdot \vec{1}_v = \vec{1}_v \cdot \vec{1}_z = \vec{1}_z \cdot \vec{1}_u$

Desnosučni $\vec{1}_z = \vec{1}_u \times \vec{1}_v \quad \vec{1}_u = \vec{1}_v \times \vec{1}_z \quad \vec{1}_v = \vec{1}_z \times \vec{1}_u$

V valjno-eliptičnem koordinatnem sistemu (u,v,z) je edino koordinatna os z ravna (premica). Koordinatni osi u in v sta ukrivljeni. Koordinatna os u je katerakoli hiperbola $v=konst.$, koordinatna os v pa katerakoli elipsa $u=konst.$. Družini hiperbol in elips imata skupni

privzeti gorišči na oddaljenosti $2\mathrm{f}$.

Laméjev koeficient $h_z=1$ je edini enak enoti. Ostala dva Laméjeva koeficienta $h_u=h_v=f\sqrt{\sinh^2 u+\sin^2 v}$ sta med sabo enaka, čeprav prvi pretvarja Nepre $[\mathrm{Np}]$ v dolžinske enote $[\mathrm{m}]$, drugi pa radiane $[\mathrm{rd}]$ v dolžinske enote $[\mathrm{m}]$.

Pravilo desnega vijaka določa privzeti vrstni red koordinat (u,v,z) oziroma vektorski produkt smernikov $\vec{1}_z=\vec{1}_u\times\vec{1}_v$. V valjno-eliptičnem koordinatnem sistemu je edino smernik $\vec{1}_z$ konstanten vektor. Smernika $\vec{1}_u$ in $\vec{1}_v$ spreminjata smer v prostoru s koordinatama u in v .

Na velikih oddaljenostih $u\gg 1$ od osi z preidejo valjno-eliptične koordinate (u,v,z) v navadne valjne koordinate (ρ,ϕ,z) . Hiperbole $v=konst.$ se približajo premicam $\phi=konst.$ (asimptotam). Elipse $u=konst.$ se približajo krogom $\rho=konst.$. Kota $v\approx\phi$ na velikih razdaljah sovpadeta. Oddaljenost $\rho\approx f/2\cdot e^u$ od osi z določimo s približkom hiperboličnih funkcij.

Povezavo med smerniki valjno-eliptičnega in kartezičnega koordinatnega sistema poiščemo tako, da iskani smernik razstavimo na komponente. V valjno-eliptičnih koordinatah projekcije smernikov niso samoumevne kot v valjnih ali krogelnih koordinatah, zato jih poiščemo z odvodi premikov. Na primer, projekcija $\vec{1}_x\cdot\vec{1}_u=dx_u/dl_u$ je enaka premiku dx_u v smeri osi x deljenemu s celotnim premikom dl_u , oba pri spremembi eliptične koordinate du . Premik v smeri x dobimo z delnim odvodom $dx_u=(\partial x/\partial u)du$, celoten premik pa z Laméjevim koeficientom $dl_u=h_u du$.

Krogelni koordinatni sistem (r,Θ,Φ) ima v eliptičnem svetu dva sorodnika. Ravnino elipse lahko zavrtimo okoli velike osi ali pa okoli male osi elipse. Glede na izbiro osi vrtenja elipse dobimo dva različna elipsoida, ki sta osnova dveh različnih krogelno-eliptičnih koordinatnih sistemov.

Vrtenina okoli velike osi je podolgovat (angleško: prolate) rotacijski elipsoid. Pripadajoči podolgovati krogelno-eliptični koordinatni sistem je uporaben za obravnavo osamljenih kovinskih, dielektričnih oziroma feromagnetnih palic.

Vrtenina okoli male osi je sploščen (angleško: oblate) rotacijski elipsoid.

Pripadajoči sploščeni krogelno-eliptični koordinatni sistem je uporaben za obravnavo osamljene krožne kovinske plošče. Sploščeni krogelno-eliptični koordinatni sistem se uporablja tudi za natančnejše zemljepisne koordinate.

Oba opisana krogelno-eliptična koordinatna sistema zapisujeta prvi dve koordinati na podoben način kot $u[\mathrm{Np}]$ in $v[\mathrm{rd}]$ v valjno-eliptičnem koordinatnem sistemu. Tretja koordinata je zemljepisna dolžina $\Phi[\mathrm{rd}]$, merjena okoli osi vrtenine. Oba krogelno-eliptična koordinatna sistema na velikih razdaljah sovpadeta z navadnimi krogelnimi koordinatami (r, Θ, Φ).

Poleg omenjenih dveh krogelno-eliptičnih koordinatnih sistemov obstaja še pisana množica najrazličnejših 3D koordinatnih sistemov. Ker se v elektrodinamiki uporabljajo bolj poredko, se opisovanje koordinatnih sistemov tu zaključuje.

* * * * *

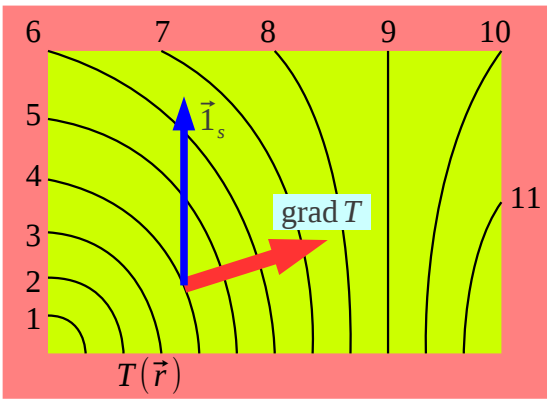
7. Odvajanje skalarnih in vektorskih funkcij

Reševanje fizikalnih nalog, kamor sodi tudi elektrodinamika, zahteva odvajanje oziroma integriranje različnih funkcij po koordinatah prostora. V tridimenzijskih nalogah nastopajo funkcije vseh treh koordinat, na primer (x, y, z) ali na kratko $(\vec{r})$. Funkcije so lahko skalarji, na primer temperatura $T(\vec{r})$, ali pa vektorji, na primer sila $\vec{F}(\vec{r})$.

Zagrizeni matematiki na hitro zaključijo, da ima v treh dimenzijah skalarna funkcija tri med sabo neodvisne odvode po treh koordinatah. Vektorsko funkcijo lahko zapišemo po komponentah. Odvajanje treh komponent po treh koordinatah daje skupaj devet različnih odvodov. Fizikalni pomen je vprašljiv, saj rezultat fizikalne naloge ne sme biti odvisen od izbire koordinatnega sistema, ki je samo računski pripomoček?

V fiziki je bolj smiselno opisati odvajanje skalarne funkcije treh koordinat $T(\vec{r})$ kot smerni odvod ali gradient. Smerni odvod $\operatorname{grad} T$ je vektor, ki kaže v smeri največje spremembe vrednosti funkcije. Velikost $|\operatorname{grad} T|$ ustreza velikosti odvoda skalarne funkcije po dolžinski enoti v tej smeri:

Smerni odvod (gradient)



$$\frac{\partial T}{\partial s} = \vec{1}_s \cdot (\operatorname{grad} T) = \vec{1}_s \cdot (\nabla T)$$

$$\operatorname{grad} T = \vec{1}_{q1} \frac{\partial T}{\partial l_1} + \vec{1}_{q2} \frac{\partial T}{\partial l_2} + \vec{1}_{q3} \frac{\partial T}{\partial l_3}$$

$$dl_j = h_j dq_j$$

$$\operatorname{grad} T = \vec{1}_{q1} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T}{\partial q_1} + \vec{1}_{q2} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T}{\partial q_2} + \vec{1}_{q3} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T}{\partial q_3}$$

Kartezične koordinate $T(\vec{r}) = T(x, y, z)$

$$\operatorname{grad} T = \vec{1}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{1}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{1}_z \frac{\partial T}{\partial z} = \nabla T$$

$$\nabla = \vec{1}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{1}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Valjne koordinate $T(\vec{r}) = T(\rho, \phi, z)$

$$\operatorname{grad} T = \vec{1}_\rho \frac{\partial T}{\partial \rho} + \vec{1}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \phi} + \vec{1}_z \frac{\partial T}{\partial z}$$

Krogelne koordinate $T(\vec{r}) = T(r, \Theta, \Phi)$

$$\operatorname{grad} T = \vec{1}_r \frac{\partial T}{\partial r} + \vec{1}_\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \Theta} + \vec{1}_\Phi \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial T}{\partial \Phi}$$

Odvod skalarne funkcije $T(\vec{r})$ v poljubni smeri s izračunamo s skalarnim produktom med smernikom $\vec{1}_s$ in smernim odvodom $\mathrm{grad}\,T$. Komponente smernega odvoda $\mathrm{grad}\,T$ so preprosto odvodi po vseh treh dolžinskih elementih l_1 , l_2 in l_3 poljubnega koordinatnega sistema. Odvode po dolžinskih elementih l_1 , l_2 in l_3 izračunamo iz odvodov po vseh treh koordinatah q_1 , q_2 in q_3 s pomočjo Laméjevih koeficientov h_1 , h_2 in h_3 .

Izračun $\mathrm{grad}\,T$ je najpreprostejši v kartezičnem koordinatnem sistemu (x, y, z) . Odvajanje lahko v kartezičnih koordinatah zapišemo s simboličnim vektorjem ∇ imenovanim »Nabla«, ki deluje na skalarno funkcijo $T(\vec{r})$. ∇ je vedno vektor, čeprav brez vektorskega znaka!

Smerni odvod $\mathrm{grad}\,T$ je sicer neodvisen od izbranega koordinatnega sistema in se rezultat njegovega izračuna prav nič ne spremeni ne glede na uporabljeni koordinatni sistem. Le vektorja ∇ ne znamo zapisati v drugih koordinatnih sistemih. Bolj točno, operator odvajanja ∇ nima preprostega zapisa povsod tam, kjer smerniki niso konstantni vektorji.

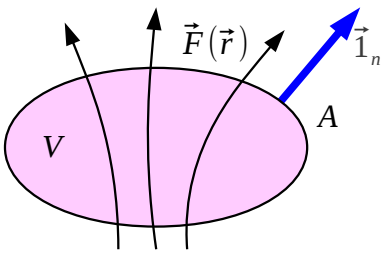
Kot primera sta prikazana izračuna smernih odvodov v valjnih (ρ, ϕ, z) in krogelnih (r, Θ, Φ) koordinatah. Laméjevi koeficienti tu ne poskrbijo samo za pravilnost številskega izračuna, pač pa poskrbijo tudi za pravilne merske enote! Odvajanje po dolžini pomeni, da morajo imeti vse komponente smernega odvoda $\mathrm{grad}\,T$ iste merske enote, ki imajo dodaten meter v imenovalcu $[\mathrm{m}]$ glede na prvotno funkcijo $T(\vec{r})$. Če je temperatura $T(\vec{r})$ izražena v Kelvinih $[\mathrm{K}]$, ima smerni odvod $\mathrm{grad}\,T$ merske enote $[\mathrm{K/m}]$.

Vektorska funkcija treh koordinat $\vec{F}(\vec{r})$ ima v fizikalnih nalogah dva zanimiva odvoda: izvornost (divergenca) in vrtinčenje (vrtinčnost oziroma rotor). Izvornost vektorske funkcije $\mathrm{div}\,\vec{F}$ opisuje Gaussov izrek. Pretok vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$ skozi sklenjeno ploskev A je enak vsoti vseh izvorov $\mathrm{div}\,\vec{F}$ v izbrani prostornini V , ki jo oklepa ploskev A .

Izvornost $\mathrm{div}\,\vec{F}$ je skalarna veličina, ki opisuje gostoto izvorov v enoti prostornine. Izvornost $\mathrm{div}\,\vec{F}$ izračunamo tako, da zapišemo Gaussov izrek za diferencialno majhno prostornino $dV \to 0$. Hkrati s prostornino se krči proti nič tudi sklenjena ploskev $A \to 0$. V poljubnem koordinatnem sistemu (q_1, q_2, q_3) zapišemo Gaussov izrek za diferencialno majhen kvader

prostornine $dV = dl_1\, dl_2\, dl_3$:

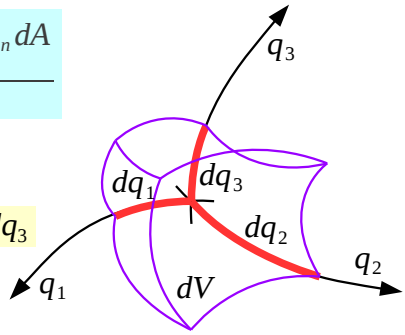
Izvornost (divergenca)



$$\operatorname{div}\vec{F} = \lim_{dV\to 0} \frac{\oiint_{A\to 0} \vec{F}\cdot\vec{1}_n\, dA}{dV}$$

$$dV = dl_1\, dl_2\, dl_3$$

$$dV = h_1 h_2 h_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3$$



Gaussov izrek

$$\oiint_A \vec{F}\cdot\vec{1}_n\, dA = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F}\, dV$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{dV}[-F_1(q_1)dA_{23}(q_1) + F_1(q_1+dq_1)dA_{23}(q_1+dq_1) - F_2(q_2)dA_{13}(q_2) + F_2(q_2+dq_2)dA_{13}(q_2+dq_2) - F_3(q_3)dA_{12}(q_3) + F_3(q_3+dq_3)dA_{12}(q_3+dq_3)]$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_2 h_3 F_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 F_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 F_3)}{\partial q_3}\right]$$

$$dA_{ij} = h_i(q_1,q_2,q_3)\, h_j(q_1,q_2,q_3)\, dq_i\, dq_j$$

Kartezične koordinate $\vec{F}(x,y,z) \rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \nabla\cdot\vec{F}$

Valjne koordinate $\vec{F}(\rho,\phi,z) \rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

Krogelne koordinate $\vec{F}(r,\Theta,\Phi) \rightarrow \operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial(\sin\Theta\, F_\Theta)}{\partial\Theta} + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial F_\Phi}{\partial\Phi}$

V krivočrtnem koordinatnem sistemu (q_1,q_2,q_3) se ploskve diferencialno majhnega kvadra $dV = dl_1\, dl_2\, dl_3$ sicer sekajo pod pravim kotom, vendar ploskve niso ravne niti niso enako velike med sabo. Ker so Laméjevi koeficienti $h_1(q_1,q_2,q_3)$, $h_2(q_1,q_2,q_3)$ in $h_3(q_1,q_2,q_3)$ funkcije koordinat, niti nasprotileže ploskve krivočrtnega kvadra niso enako velike med sabo! Pri krčenju diferencialno majhnega kvadra $dV \rightarrow 0$ dobimo poleg odvodov komponent vektorske funkcije F_1 , F_2 in F_3 tudi odvode Laméjevih koeficientov h_1 , h_2 in h_3 povsod tam, kjer nastopajo v površinah dA_{ij} ploskev krivočrtnega kvadra.

Izračun izvornosti $\operatorname{div}\vec{F}$ je najpreprostejši v kartezičnem koordinatnem sistemu. V slednjem je diferencialno majhna prostornina $dV \rightarrow 0$ res pravi kvader z ravnimi in med sabo enakimi nasprotileznimi ploskvami. Izvornost $\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F}$ zapišemo kot skalarni produkt vektorja »Nabla« in vektorske funkcije treh koordinat $\vec{F}(\vec{r})$.

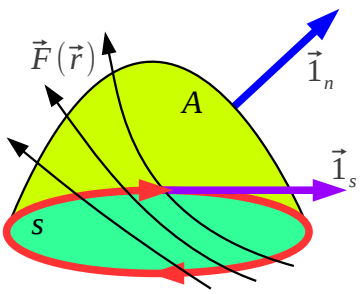
Kot primera sta prikazana izračuna izvornosti $\operatorname{div}\vec{F}$ v valjnih (ρ,ϕ,z) in krogelnih (r,Θ,Φ) koordinatah. Laméjevi koeficienti tu ne

poskrbijo samo za pravilnost številskega izračuna, pač pa poskrbijo tudi za pravilne merske enote! Tudi izračun izvornosti $\operatorname{div}\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}$ pomeni odvajanje po dolžini. Računanje z vektorjem »Nabla« ni preprosto, ker so smerniki funkcije krivočrtnih koordinat. Izvornost $\operatorname{div}\vec{F}$ mora imeti merske enote, ki imajo dodaten meter v imenovalcu $[\mathrm{m}]$ glede na komponente vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$.

Vrtinčenje vektorske funkcije $\operatorname{rot}\vec{F}$ opisuje Stokesov izrek. Integral vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$ po sklenjeni krivulji s je enak vsoti vseh vrtincev $\operatorname{rot}\vec{F}$ na ploskvi A , ki je vpeta na krivuljo s .

Vrtinčenje (vrtinčnost oziroma rotor) $\operatorname{rot}\vec{F}$ (angleško: $\operatorname{curl}\vec{F}$) je vektorska veličina, ki kaže v smeri osi vrtenja po pravilu desnega vijaka. V poljubnem koordinatnem sistemu (q_1,q_2,q_3) izračunamo eno komponento vrtinčenja $\vec{1}_{q3}\cdot(\operatorname{rot}\vec{F})$ tako, da zapišemo Stokesov izrek za diferencialno majhno ploskev $dA=dl_1dl_2\to 0$ v drugih dveh koordinatah. Hkrati s sklenjeno krivuljo $s\to 0$ se krči proti nič tudi na krivuljo vpeta ploskev $A\to 0$:

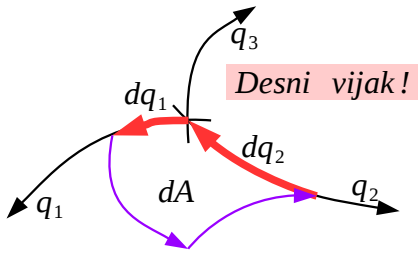
Vrtinčenje (rotor)



$$\vec{1}_{q3}\cdot(\operatorname{rot}\vec{F})=\lim_{dA\to 0}\frac{\oint_{s\to 0}\vec{F}\cdot\vec{1}_s ds}{dA}$$

$$dA=dl_1dl_2=h_1h_2dq_1dq_2$$

$$dl_j=h_j(q_1,q_2,q_3)dq_j$$



$$\vec{1}_{q3}\cdot(\operatorname{rot}\vec{F})=\frac{1}{dA}[F_1(q_2)h_1(q_2)dq_1+F_2(q_1+dq_1)h_2(q_1+dq_1)dq_2 -F_1(q_2+dq_2)h_1(q_2+dq_2)dq_1-F_2(q_1)h_2(q_1)dq_2]$$

Stokesov izrek

$$\oint_s\vec{F}\cdot\vec{1}_s ds=\iint_A(\operatorname{rot}\vec{F})\cdot\vec{1}_n dA$$

$$\vec{1}_{q3}\cdot(\operatorname{rot}\vec{F})=\frac{1}{h_1h_2}\left[\frac{\partial(F_2h_2)}{\partial q_1}-\frac{\partial(F_1h_1)}{\partial q_2}\right]$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{1}_{q1} & h_2\vec{1}_{q2} & h_3\vec{1}_{q3} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1F_1 & h_2F_2 & h_3F_3 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}=\nabla\times\vec{F}=\operatorname{curl}\vec{F}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}(\rho,\phi,z)=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{1}_\rho & \rho\vec{1}_\phi & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\frac{1}{r^2\sin\Theta}\begin{vmatrix} \vec{1}_r & r\vec{1}_\Theta & r\sin\Theta\vec{1}_\Phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\Theta} & \frac{\partial}{\partial\Phi} \\ F_r & rF_\Theta & r\sin\Theta F_\Phi \end{vmatrix}$$

V krivočrtnem koordinatnem sistemu (q_1, q_2, q_3) se stranice diferencialno majhnega pravokotnika $dA = dl_1 dl_2$ sicer sekajo pod pravim kotom, vendar stranice niso ravne niti niso enako velike med sabo. Ker sta Laméjeva koeficienta $h_1(q_1, q_2, q_3)$ in $h_2(q_1, q_2, q_3)$ funkciji koordinat, niti nasprotileže stranice krivočrtnega pravokotnika niso enako velike med sabo! Pri krčenju diferencialno majhnega pravokotnika $dA \rightarrow 0$ dobimo poleg odvodov komponent vektorske funkcije F_1 in F_2 tudi odvode Laméjevih koeficientov h_1 in h_2 povsod tam, kjer nastopajo v dolžinah dl_j stranic krivočrtnega pravokotnika.

Na podoben način kot komponento $\vec{1}_{q3} \cdot (\mathrm{rot}\, \vec{F})$ izračunamo še ostali dve komponenti vrtinčenja $\vec{1}_{q1} \cdot (\mathrm{rot}\, \vec{F})$ in $\vec{1}_{q2} \cdot (\mathrm{rot}\, \vec{F})$. Celoten izračun vrtinčenja $\mathrm{rot}\, \vec{F}$ lahko lepo uredimo v determinanto 3×3 , ki spominja na vektorski produkt z dodatki Laméjevih koeficientov pred samo determinanto, v gornjo vrstico determinante s smerniki in v spodnjo vrstico determinante s komponentami vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$.

Izračun vrtinčenja $\mathrm{rot}\, \vec{F}$ je najpreprostejši v kartezičnem koordinatnem sistemu. V slednjem so diferencialno majhne ploskve $dA_{ij} \rightarrow 0$ res pravi pravokotniki z ravnimi in med sabo enakimi nasprotileže stranicami. Vrtinčenje $\mathrm{rot}\, \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$ zapišemo kot vektorski produkt vektorja »Nabla« in vektorske funkcije treh koordinat $\vec{F}(\vec{r})$.

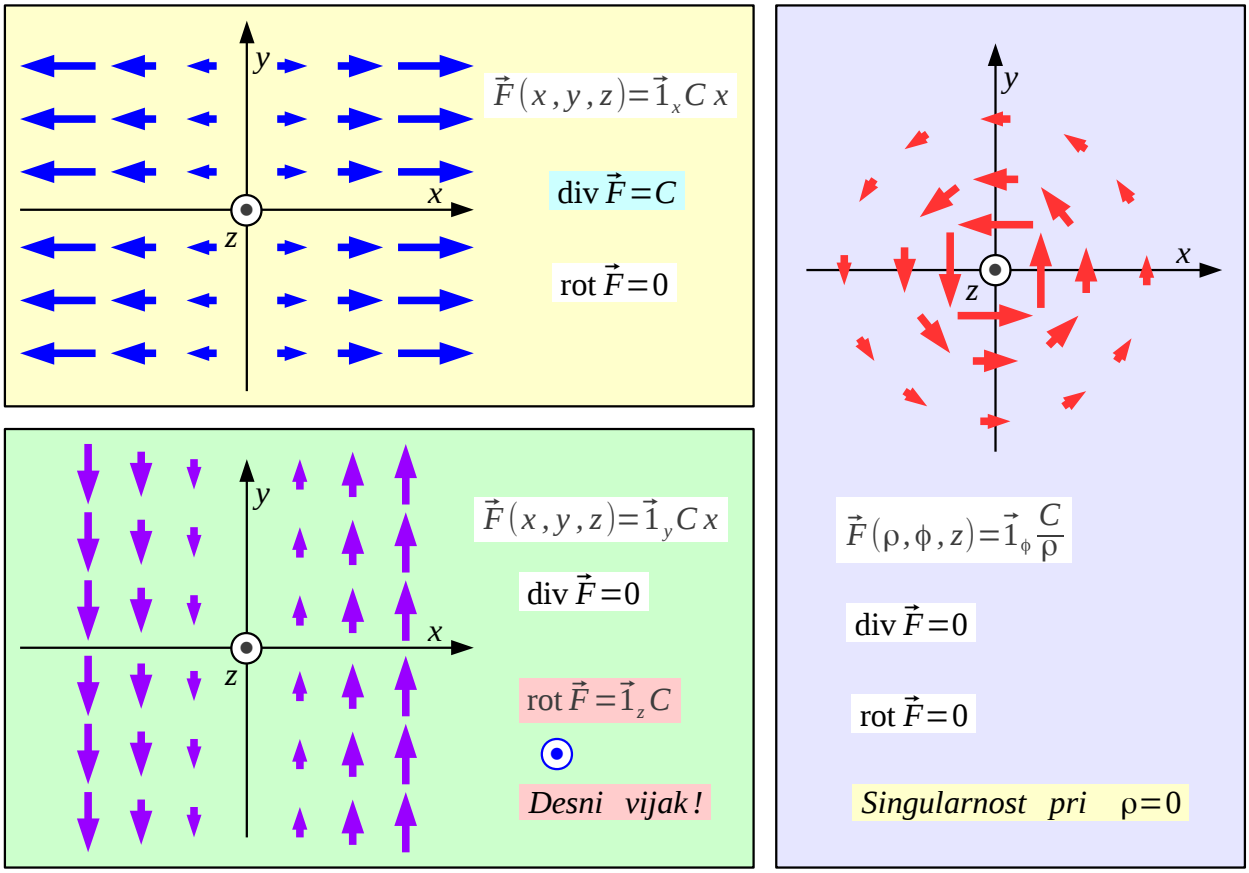
Kot primera sta prikazana izračuna vrtinčenja $\mathrm{rot}\, \vec{F}$ v valjnih (ρ, ϕ, z) in krogelnih (r, Θ, Φ) koordinatah. Laméjevi koeficienti tu ne poskrbijo samo za pravilnost številskega izračuna, pač pa poskrbijo tudi za pravilne merske enote! Vektor vrtinčenja $\mathrm{rot}\, \vec{F}$ mora imeti merske enote, ki imajo dodaten meter v imenovalcu $[\mathrm{m}]$ glede na vektorsko funkcijo $\vec{F}(\vec{r})$.

Glede na različne izraze za vrtinčenje se uporablja oznaka $\mathrm{rot}\, \vec{F}$ v osrednji Evropi oziroma $\mathrm{curl}\, \vec{F}$ v angleško govorečih deželah. V izogibanje zmešnjavi pogosto pišemo vrtinčenje kar kot $\nabla \times \vec{F}$ ne glede na uporabljeni koordinatni sistem, čeprav računanje z vektorjem »Nabla« v krivočrtnih koordinatah ni preprosto.

Izvornost (divergenca) in vrtinčenje (rotor) skupno uporabljata vseh devet med sabo neodvisnih odvodov vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$ v treh

dimenzijah. Od teh uporablja izvornost tri odvode komponent po pripadajočih koordinatah, vrtinčenje pa šest odvodov komponent po preostalih koordinatah. Izvornost $\operatorname{div}\vec{F}$ in vrtinčenje $\operatorname{rot}\vec{F}$ sta torej dve med sabo popolnoma neodvisni funkciji. Z drugimi besedami, vektorsko funkcijo $\vec{F}(\vec{r})$ poznamo do konstante natančno, če poznamo vse njene odvode, torej izvornost $\operatorname{div}\vec{F}$ in vrtinčenje $\operatorname{rot}\vec{F}$.

Nekaj preprostih zgledov izvornosti $\operatorname{div}\vec{F}$ in vrtinčenja $\operatorname{rot}\vec{F}$ je prikazanih na spodnji sliki. Levo zgoraj je primer vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, ki ima izvore. Jakost vektorjev narašča v isti smeri, kamor kažejo vektorji. Naraščajoči pretok zahteva prisotnost izvorov:



Levo spodaj je primer vektorske funkcije $\vec{F}(\vec{r})$, ki ima vrtince. Velikost vektorjev se v isti smeri ne spreminja, torej izvorov ni. Kakršnakoli sklenjena pot v ravnini xy daje rezultat različen od nič, torej obstajajo vrtinci. Vrtinci imajo vektorski značaj. Vektor vrtinčenja kaže v smeri osi vrtenja, torej v smeri $\vec{1}_z$ po pravilu desnega vijaka.

Zgled na desni zagotovo namiguje na vrtenje. Kljub temu funkcija $\vec{F}(\vec{r})$ nima niti izvorov niti vrtincev? Kakršnakoli sklenjena pot v ravnini

xy daje rezultat nič pod pogojem, da pot ne zajame singularnosti v osi z oziroma pri $\rho=0$. Zgled na desni je torej strogo opozorilo: kakršnokoli odvajanje ne deluje pravilno v singularnostih. Singularnosti moramo v naših računih upoštevati na drugačen način, saj tam ne moremo računati odvodov.

Fizikalne naloge pogosto privedejo do diferencialnih enačb druge stopnje. Vsi opisani postopki odvajanja: smerni odvod $\operatorname{grad} T$, izvornost $\operatorname{div} \vec{F}$ in vrtinčenje $\operatorname{rot} \vec{F}$ pomenijo odvajanje prvega reda. Odvode drugega reda dobimo tako, da sestavimo dva postopka odvajanja prvega reda.

V fizikalnih nalogah je najbolj pogost Laplacejev operator odvajanja drugega reda. Laplacejev operator zapišemo z Δ (velika grška črka »Delta«). Iz skalarne funkcije $T(\vec{r})$ naredi (skalarni) Laplace novo skalarno funkcijo ΔT :

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} T)=\nabla\cdot(\nabla T)=\Delta T=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

Smerni odvod $\operatorname{grad} T$ je vektorska funkcija, torej smemo izračunati njeno vrtinčenje, ki je vedno enako nič:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} T)=\nabla\times(\nabla T)=\vec{0} \quad (\textit{vektor nič})$$

Ko bi smerni odvod $\operatorname{grad} T$ imel vrtince, bi pri integriranju dobili različne vrednosti izvorne skalarne funkcije $T(\vec{r})$ odvisno od izbrane integracijske poti, kar zagotovo ni smiselno. Omejitve obstajajo tudi za vrtince, ki ne smejo imeti izvorov:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F})=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})=0$$

Ko bi vrtinci imeli izvore, bi bila rezultata integracije vrtincev po dveh različnih ploskvah A_1 in A_2 , vpetih na isto sklenjeno krivuljo s , med sabo različna, kar nasprotuje opisu vrtinčenja s Stokesovim izrekom.

Izvornost sicer pogosto potrebujemo za Gaussov izrek, da zahtevno integracijo po prostornini V prevedemo na manj zahtevo oziroma zanimivejšo integracijo po sklenjeni ploskvi A . Izvornost lahko razvijemo tako za skalarni funkciji $U(\vec{r})$ in $W(\vec{r})$ kot za vektorski funkciji $\vec{A}(\vec{r})$ in $\vec{B}(\vec{r})$:

$$\operatorname{div}(U \operatorname{grad} W - W \operatorname{grad} U) = \nabla \cdot (U \nabla W - W \nabla U) = U \Delta W - W \Delta U$$

$$\operatorname{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}$$

Končno se nam pri reševanju enačb v elektrodinamiki pogosto pojavi vrtinčenje vrtinčenja oziroma izraz $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{F})$. Izraz skušamo prevesti v Laplace vektorske funkcije oziroma vektorski Laplace, ki je definiran kot:

$$\Delta \vec{F} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \vec{1}_x \Delta F_x + \vec{1}_y \Delta F_y + \vec{1}_z \Delta F_z$$

Povsem enako kot ostali postopki odvajanja vektorskih funkcij tudi Laplace hkrati učinkuje na posamezne komponente vektorske funkcije in na pripadajoče smernike, če slednji niso konstante. Vektorski Laplace zato v splošnem ni preprosta vsota treh skalarnih Laplacejev posameznih komponent vektorske funkcije. Edino v kartezičnih koordinatah lahko vektorski Laplace preprosto razvijemo v vsoto treh skalarnih Laplacejev na posameznih komponentah vektorske funkcije.

Laplace skalarne funkcije je navsezadnje tisto, kar dejansko znamo rešiti. Poleg kartezičnih koordinat je razvoj v preprostejši skalarni Laplace možen povsod tam, kjer so smerni vektorji konstantni. V valjnih in valjno-eliptičnih koordinatah je smernik $\vec{1}_z$ konstanten, torej smemo komponento z vektorskega Laplaceja $\vec{1}_z \cdot \Delta \vec{F} = \Delta F_z$ zapisati s skalarnim Laplacejem pripadajoče komponente F_z .

* * * * *

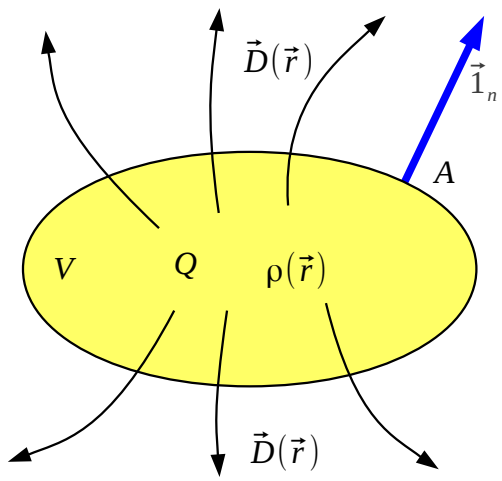
8. Maxwellove enačbe

James Clerk Maxwell je vse dotedanje znanje o elektriki in magnetiki leta 1861 združil v slovite enačbe, ki danes nosijo njegovo ime. Maxwellove enačbe lahko zapišemo na različne načine. V vektorskem zapisu, kot jih najpogosteje uporabljamo danes, jih je dve desetletji za Maxwellom zapisal šele Oliver Heaviside.

Pri osnovah elektrotehnike zapišemo Maxwellove enačbe z najmanj matematike v integralni obliki. V elektrodinamiki jih želimo pretvoriti v diferencialno obliko, da postane naloga zadosti majhna, torej diferencialno majhna. V diferencialno majhni nalogi so zakasnitve diferencialno majhne, da relativistika ne nagaja. Žal postopki odvajanja ne morejo čez nezveznosti, zato na meji dveh različnih snovi zapišemo Maxwellove enačbe še na tretji način, z mejnimi (prestopnimi) pogoji.

Povezavo med viri polja in pretokom je našel znani matematik Carl Friedrich Gauss leta 1835. V elektrostatiki je vsota prostorske gostote elektrine $\rho(\vec{r})$ (angleško: electric charge density) v določeni prostornini V enaka celotni elektrini Q. Isti rezultat da tudi vsota gostote električnega pretoka $\vec{D}(\vec{r})$ (angleško: electric displacement field) po sklenjeni površini A, ki zajema isto prostornino:

Gaussov zakon



Gaussov zakon v integralni obliki

$$\oiint_A \vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{1}_n\,dA = Q = \iiint_V \rho(\vec{r})\,dV$$

$\rho(\vec{r}) \equiv$ *prostorska gostota elektrine* $[\mathrm{As/m^3}]$

$Q \equiv$ *celotna elektrina* $[\mathrm{As}]$

$\vec{D}(\vec{r}) \equiv$ *gostota električnega pretoka* $[\mathrm{As/m^2}]$

Gaussov izrek

$$\oiint_A \vec{D}(\vec{r})\cdot\vec{1}_n\,dA = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{D}(\vec{r})\,dV$$

Gaussov zakon v diferencialni obliki

$$\mathrm{div}\,\vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$$

$\vec{E}(\vec{r}) \equiv$ *električna poljska jakost* $[\mathrm{V/m}]$

$\epsilon \equiv$ *dielektričnost* $[\mathrm{As/Vm}]$

$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon\,\vec{E}(\vec{r}) \rightarrow \mathrm{div}(\epsilon\,\vec{E}(\vec{r})) = \rho(\vec{r})$

Magnetno polje nima izvorov

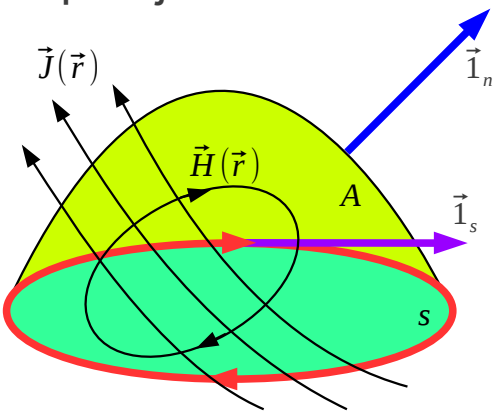
$$\oiint_A \vec{B}(\vec{r})\cdot\vec{1}_n\,dA = 0 \rightarrow \mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r}) = 0$$

Zapis v takšni integralni obliki (seštevanje) je sicer preprosto razumljiv, ampak neroden. Za opis fizikalnega zakona potrebujemo neko prostornino V in neko sklenjeno površino A, ki nista del naloge niti nujno nista majhni. S pomočjo Gaussovega izreka iz matematike pretvorimo Gaussov zakon v diferencialno obliko $\mathrm{div}\,\vec{D}(\vec{r}) = \rho(\vec{r})$.

Magnetno polje nima izvorov niti ponorov. Gaussov zakon za gostoto magnetnega pretoka $\vec{B}(\vec{r})$ (angleško: magnetic flux density) lahko pretvorimo iz integralne oblike v diferencialno $\mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r}) = 0$.

Povezavo med električnim tokom I in pripadajočo magnetno poljsko jakostjo $\vec{H}(\vec{r})$ (angleško: magnetic field intensity) je našel André-Marie Ampère leta 1826. Integral $\vec{H}(\vec{r})$ po sklenjeni krivulji s daje celotni tok I (angleško: total current), ki teče skozi krivuljo. Tok I je vsota (integral) gostote električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ po poljubni ploskvi A, ki je napeta na isto sklenjeno krivuljo:

Ampèrejev zakon



Ampèrejev zakon v integralni obliki

$$\iint_A \vec{J}(\vec{r})_{skupni}\cdot\vec{1}_n\,dA = I = \oint_s \vec{H}(\vec{r})\cdot\vec{1}_s\,ds$$

$\vec{J}(\vec{r}) \equiv$ *gostota električnega toka* $[\mathrm{A/m^2}]$

$I \equiv$ *celoten električni tok* $[\mathrm{A}]$

$\vec{H}(\vec{r}) \equiv$ *magnetna poljska jakost* $[\mathrm{A/m}]$

Stokesov izrek

$$\oint_s \vec{H}(\vec{r})\cdot\vec{1}_s\,ds = \iint_A (\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r}))\cdot\vec{1}_n\,dA$$

Ampèrejev zakon v diferencialni obliki

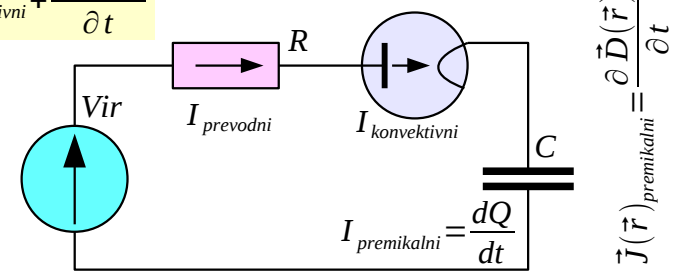
$$\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})_{celotni} = \vec{J}(\vec{r})_{prevodni} + \vec{J}(\vec{r})_{konvektivni} + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r})}{\partial t}$$

$\gamma \equiv$ *specifična prevodnost* $[\mathrm{A/Vm}]$

$$\vec{J}(\vec{r})_{prevodni} = \gamma\,\vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})_{prevodni} + \vec{J}(\vec{r})_{konvektivni}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r})}{\partial t} = \vec{J}(\vec{r}) + \epsilon\frac{\partial \vec{E}(\vec{r})}{\partial t}$$



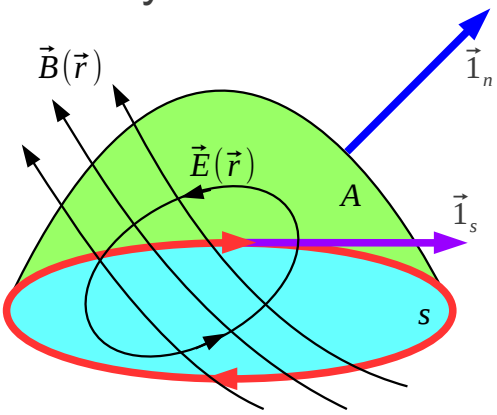
Zapis Ampèrejevega zakona v integralni obliki (seštevanje) je sicer preprosto razumljiv, ampak neroden. Za njegov opis potrebujemo neko sklenjeno krivuljo s in neko ploskev A, ki nista del naloge niti nujno nista majhni. S pomočjo Stokesovega izreka iz matematike pretvorimo Ampèrejev zakon v diferencialno obliko $\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r})_{celotni}$.

Ampèrejev zakon (Maxwellova razširitev) vključuje vse električne tokove: prevodni tok $I_{prevodni}$ v kovinah (angleško: conduction current, tudi konduktivni tok), konvektivni tok (angleško: convection current) nosilcev elektrine v povsem praznem prostoru $I_{konvektivni}$ in premikalni tok $I_{premikalni} = dQ/dt$ (angleško: displacement current, dvoumen slovenski izraz poljski tok) kot prirastek električnega pretoka v enoti časa. Gostoto premikalnega toka $\partial\vec{D}(\vec{r})/\partial t$ običajno zapišemo posebej. Oznako $\vec{J}(\vec{r})$ običajno uporabljamo za gostoto prevodnega električnega toka, saj konvektivni tok v marsikateri praktični nalogi ne nastopa.

Znotraj prevodnika je gostota prevodnega električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ povezana z električno poljsko jakostjo $\vec{E}(\vec{r})$ preko specifične prevodnosti snovi γ, vendar povezave $\vec{J}(\vec{r}) = \gamma\,\vec{E}(\vec{r})$ (Ohmov zakon v diferencialni obliki) pogosto ne zapisujemo.

Michael Faraday je leta 1831 odkril, da sprememba celotnega magnetnega pretoka $d\Phi/dt=-U_i$ inducira v žični zanki napetost. Inducirana napetost je integral električne poljske jakosti po sklenjeni krivulji zanke s. Celoten magnetni pretok Φ je vsota (integral) gostote magnetnega pretoka $\vec{B}(\vec{r})$ po poljubni ploskvi A, ki je napeta na sklenjeno krivuljo zanke:

Faradayev zakon



Faradayev zakon v integralni obliki

$$\oint_s \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{1}_s\,ds=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\partial}{\partial t}\iint_A \vec{B}(\vec{r})\cdot\vec{1}_n\,dA$$

$\vec{B}(\vec{r})\equiv$ *gostota magnetnega pretoka* $[\mathrm{Vs/m^2}]$

$\Phi\equiv$ *celoten magnetni pretok* $[\mathrm{Vs}]$

$\vec{E}(\vec{r})\equiv$ *električna poljska jakost* $[\mathrm{V/m}]$

Stokesov izrek

$$\oint_s \vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{1}_s\,ds=\iint_A (\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r}))\cdot\vec{1}_n\,dA$$

Faradayev zakon v diferencialni obliki

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r})=-\frac{\partial\vec{B}(\vec{r})}{\partial t}=-\mu\frac{\partial\vec{H}(\vec{r})}{\partial t}$$

$\mu\equiv$ *permeabilnost* $[\mathrm{Vs/Am}]$

$\vec{B}(\vec{r})=\mu\vec{H}(\vec{r})$

Magnetno polje nima izvorov

$$\mathrm{div}\left[\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r})\right]=0=\mathrm{div}\left[-\frac{\partial\vec{B}(\vec{r})}{\partial t}\right]\rightarrow\ \mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{r})=0$$

Zapis Faradayevega zakona v integralni obliki (seštevanje) je sicer preprosto razumljiv, ampak neroden. Za njegov opis potrebujemo neko sklenjeno krivuljo s in neko ploskev A, ki nista del naloge niti nujno nista majhni. S pomočjo Stokesovega izreka iz matematike pretvorimo Faradayev zakon v diferencialno obliko $\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r})=-\partial\vec{B}(\vec{r})/\partial t$.

Pri opisani obravnavi Maxwellovih enačb v elektrodinamiki privzamemo poenostavitev, da se krivulje s, ploskve A in prostornine V s časom ne spreminjajo, premikajo oziroma vrtijo. Prav tako privzamemo, da je odziv snovi linearen in so lastnosti snovi dielektričnost ϵ, prevodnost γ in permeabilnost μ preproste (skalarne) konstante. Lastnosti homogene snovi niso odvisne od položaja $\vec{r}$. Lastnosti izotropne snovi niso tenzorji.

Če izračunamo izvornost $\mathrm{div}()$ Faradayevega zakona, ugotovimo, da gostota magnetnega pretoka $\vec{B}(\vec{r})$ vsaj v dinamiki $\partial/\partial t \neq 0$ nima izvorov. Magnetnih nabojev ali magnetin kljub vsemu iskanju do danes fiziki niso našli. Poseben zapis Gaussovega zakona za magnetno polje v elektrodinamiki $\partial/\partial t \neq 0$ torej sploh ni potreben.

Relativistika sicer nikjer ne zahteva vrtinčenja. Ampère in Faraday mogoče danes izgledata starokopitna? Kljub odsotnosti magnetnih nabojev je obravnava z vrtinčenjem dobrodošla v različnih naravnih snoveh (feromagnetiki) in v umetno izdelanih, uporabnih napravah (žične zanke, tuljave). Smeri oziroma predznake magnetnih veličin $\vec{H}(\vec{r})$, $\vec{B}(\vec{r})$ in Φ smemo poljubno izbrati, na primer z izbiro desnosučnega koordinatnega sistema. Edina resnična fizikalna danost je, da imata Ampère in Faraday različna predznaka!

Če izračunamo izvornost $\mathrm{div}()$ Ampèrejevega zakona, pridemo do pomembne povezave med gostoto električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ in prostorsko gostoto elektrine $\rho(\vec{r})$. V izvorih toka se začne pojavljati primanjkljaj elektrine, v ponorih toka pa se začne pojavljati višek elektrine. Opisano fizikalno zakonitost imenujemo zveznost (kontinuitetna enačba) toka in elektrine.

Če seštejemo gostoto električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ v električni tok I in prostorsko gostoto elektrine $\rho(\vec{r})$ v celotno elektrino Q , lahko zveznost toka in elektrine opišemo še bolj enostavno s skalarno enačbo. Preprost zgled sta dve sicer izolirani kovinski elektrodi, ki ju povežemo s prevodno žico. Tok v žici I je enak časovnemu prirastku elektrine dQ_1/dt na eni elektrodi in primanjkljaju elektrine $-dQ_2/dt$ na drugi elektrodi:

Zveznost toka in elektrine

$$Ampère: \quad \mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r})=\vec{J}(\vec{r})+\frac{\partial \vec{D}(\vec{r})}{\partial t} \quad /\mathrm{div}()$$

$$\mathrm{div}\left[\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r})\right]=0=\mathrm{div}\,\vec{J}(\vec{r})+\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\vec{D}(\vec{r})$$

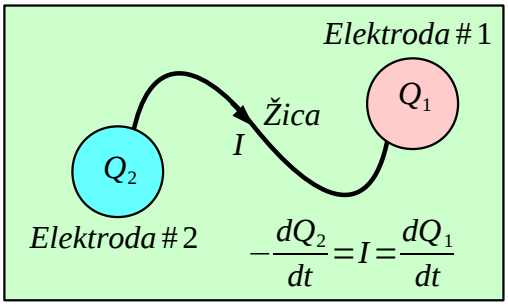
$$Gauss: \quad \rho(\vec{r})=\mathrm{div}\,\vec{D}(\vec{r})$$

$$0=\mathrm{div}\,\vec{J}(\vec{r})+\frac{\partial \rho(\vec{r})}{\partial t}$$

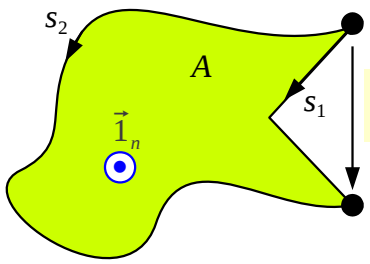
$$\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{J}(\vec{r})\,dV=I$$

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(\vec{r})}{\partial t}\,dV=\frac{dQ}{dt}$$

$$0=I+\frac{dQ}{dt}$$



Definicija napetosti



$$U \equiv \text{električna napetost} \quad [\mathrm{V}]$$

$$U=\int_{s_1}\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{1}_{s1}\,ds_1=\int_{s_2}\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{1}_{s2}\,ds_2$$

$$\oint_{s_1+s_2}\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{1}_s\,ds=0=\iint_A(\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r}))\cdot\vec{1}_n\,dA \;\rightarrow\; \vec{1}_n\cdot(\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r}))=0$$

V elektrotehničnih nalogah pogosto uporabljamo veličino električno napetost U (angleško: voltage in oznaka V). Napetost med dvema točkama je integral električne poljske jakosti $\vec{E}(\vec{r})$ po krivulji s , ki povezuje obe točki. V elektrodinamiki definicija napetosti ni vedno smiselna. V marsikateri nalogi elektrodinamike napetost U sploh ne obstaja, ker integracija po različnih poteh daje različne rezultate.

Strogo mišljeno napetost U obstaja samo takrat, ko daje integracija po katerikoli poti enak rezultat. Integracija po katerikoli sklenjeni poti mora dati rezultat nič, kar strogo zahteva $\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r})=0$. V marsikateri nalogi se sprijaznimo z definicijo napetosti U v izbrani ravnini in takrat zadošča milejši pogoj $\vec{1}_n\cdot(\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r}))=0$.

V predlagani vektorski in diferencialni obliki lahko zapišemo Maxwellove enačbe na številne različne načine. Ko so vse električne in magnetne veličine funkcije istega položaja $(\vec{r})$, lahko to v vseh enačbah izpustimo. Preprosta linearna, homogena in izotropna snov nam omogoča, da iz enačb izločimo gostote pretokov. Končno v frekvenčnem prostoru postanejo vse električne veličine kazalci, časovne odvode pa nadomesti $j\omega$:

Valovna enačba

Časovni prostor

$$(1)\quad \mathrm{rot}\,\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$(2)\quad \mathrm{rot}\,\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$(3)\quad \mathrm{div}\,\vec{D}=\rho$$

Snov

$$\vec{D}=\epsilon\,\vec{E}$$

$$\vec{B}=\mu\,\vec{H}$$

Poljske jakosti

$$(1)\quad \mathrm{rot}\,\vec{H}=\vec{J}+\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$(2)\quad \mathrm{rot}\,\vec{E}=-\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$(3)\quad \mathrm{div}\,\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon}$$

Odvodi

$$\frac{\partial}{\partial t}=j\omega$$

Frekvenčni prostor

$$(1)\quad \mathrm{rot}\,\vec{H}=\vec{J}+j\omega\epsilon\,\vec{E}$$

$$(2)\quad \mathrm{rot}\,\vec{E}=-j\omega\mu\,\vec{H}$$

$$(3)\quad \mathrm{div}\,\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})=-j\omega\mu\,\mathrm{rot}\,\vec{H}=-j\omega\mu(\vec{J}+j\omega\epsilon\,\vec{E})=-j\omega\mu\,\vec{J}+\omega^2\mu\epsilon\,\vec{E}$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{E})-\Delta\vec{E}=\frac{1}{\epsilon}\mathrm{grad}\,\rho-\Delta\vec{E}$$

Valovna enačba za $\vec{E}$

$$\Delta\vec{E}+\omega^2\mu\epsilon\,\vec{E}=j\omega\mu\,\vec{J}+\frac{1}{\epsilon}\mathrm{grad}\,\rho$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{H})=\mathrm{rot}\,\vec{J}+j\omega\epsilon\,\mathrm{rot}\,\vec{E}=\mathrm{rot}\,\vec{J}+\omega^2\mu\epsilon\,\vec{H}$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{H})=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\vec{H})-\Delta\vec{H}=-\Delta\vec{H}$$

Valovna enačba za $\vec{H}$

$$\Delta\vec{H}+\omega^2\mu\epsilon\,\vec{H}=-\mathrm{rot}\,\vec{J}$$

S pomočjo Maxwellovih enačb skušamo rešiti preprosto elektrotehnično nalogo: kakšni sta polji $\vec{E}$ oziroma $\vec{H}$, če poznamo izvore, torej vse tokove $\vec{J}$ in vse elektrine ρ ? Valovno enačbo za električno polje $\vec{E}$ dobimo tako, da drugo Maxwellovo enačbo (Faraday) odvajamo z $\mathrm{rot}()$. Dobljeni $\mathrm{rot}\,\vec{H}$ nato zamenjamo po prvi Maxwellovi enačbi (Ampère). Končno pretvorimo $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})$ v (vektorski) Laplace $\Delta\vec{E}$ in manjkajoči $\mathrm{div}\,\vec{E}$ nadomestimo s tretjo Maxwellovo enačbo (Gauss).

Valovno enačbo za magnetno polje $\vec{H}$ dobimo na podoben način. Najprej odvajamo Ampère z $\mathrm{rot}()$. Dobljeni $\mathrm{rot}\,\vec{E}$ nato zamenjamo po Faradayu. Končno pretvorimo $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{H})$ v (vektorski) Laplace $\Delta\vec{H}$, saj je $\mathrm{div}\,\vec{H}=0$ vedno nič.

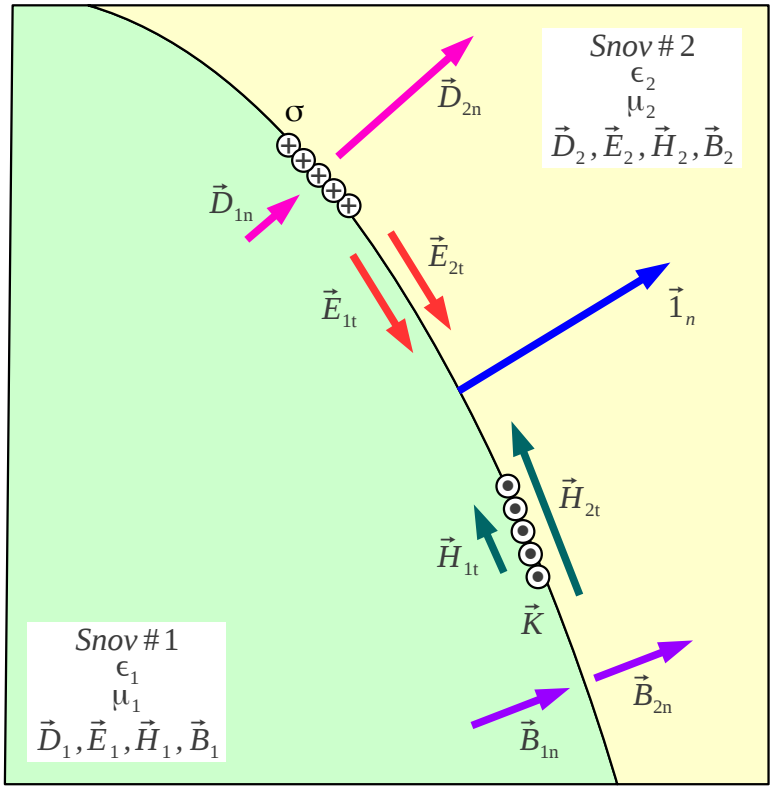
Obe valovni enačbi za $\vec{E}$ in $\vec{H}$ imata isto pomanjkljivost: na izvore na desni strani, tokove $\vec{J}$ in elektrine ρ , delujejo diferencialne operacije, ki jih je običajno težko izračunati zaradi singularnosti. Računanje električnega in magnetnega polja neposredno preko Maxwellovih enačb iz tokov in elektrin ni najbolj ugodna pot. Obe valovni enačbi za $\vec{E}$ in $\vec{H}$ seveda s pridom uporabljamo v tistih delih prostora, kjer izvorov ni in je desna stran valovnih enačb enaka nič.

Končno v elektrotehničnih nalogah pogosto naletimo na primere, ko imamo v isti nalogi več različnih snovi. Vsaka snov sama zase je preprosta, torej linearna, homogena in izotropna. Meja dveh različnih snovi predstavlja singularnost, kjer ne smemo uporabljati Maxwellovih enačb v diferencialni obliki. Mejo dveh različnih snovi zato opišemo s prestopnimi pogoji povsem enako kot pri osnovah elektrotehnike:

Mejni pogoji

$\sigma \equiv ploskovna\ \ elektrina\ \ [\mathrm{As/m^2}]$

$\vec{K} \equiv ploskovni\ \ tok\ \ [\mathrm{A/m}]$



$$\vec{1}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\vec{1}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$$

$$\vec{1}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K}$$

$$\vec{1}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

Tangencialno komponento izlušči vektorski produkt z normalo, normalno komponento pa skalarni produkt z normalo. Tangencialna komponenta $\vec{E}$ in normalna komponenta $\vec{B}$ vedno prestopata zvezno. Normalna komponenta $\vec{D}$ lahko ima skok, ki ustreza ploskovni elektrini σ, ki je nabrana na meji dveh snovi. Ploskovni tok $\vec{K}$ na meji dveh snovi povzroči skok tangencialne komponente $\vec{H}$.

* * * * *

9. Vektorski potencial

Reševanje preproste elektrotehnične naloge: kakšni sta polji $\vec{E}(\vec{r})$ oziroma $\vec{H}(\vec{r})$, če poznamo izvore, torej vse tokove $\vec{J}(\vec{r})$ in vse elektrine $\rho(\vec{r})$, vodi v dve komplicirani, vektorski diferencialni valovni enačbi drugega reda. Kompliciran račun skušamo poenostaviti z uvedbo novih vmesnih spremenljivk, ki jih imenujemo potenciali.

Račun je najpreprostejši v elektrostatiki $\partial/\partial t=0$ oziroma $\omega=0$. Takrat je vrtinčenje električnega polja zagotovo enako nič $\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r})=0$. Če je vrtinčenje vektorskega polja enako nič, lahko takšno polje zapišemo kot smerni odvod neke skalarne veličine. Izbrano skalarno funkcijo $V(\vec{r})$ imenujemo kar potencial v elektrostatiki:

$$\vec{E}(\vec{r})=-\mathrm{grad}\,V(\vec{r})$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon} \;\rightarrow\; \mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,V\right)=\Delta V=-\frac{\rho}{\epsilon}$$

Žal sta takšen potencial $V(\vec{r})$ in pripadajoča diferencialna enačba skoraj neuporabna v elektrodinamiki, kjer velja $\omega\neq 0$ oziroma $\mathrm{rot}\,\vec{E}\neq 0$.

Podoben skalarni potencial $V_m(\vec{r})$ lahko uvedemo v magnetostatiki. $\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r})=0$ zahteva statiko $\partial/\partial t=0$ oziroma $\omega=0$ in hkrati še odsotnost tokov $\vec{J}(\vec{r})=0$ vsaj v tistem delu prostora, kjer uporabljamo $V_m(\vec{r})$. Skalarni magnetni potencial $V_m(\vec{r})$ tedaj določa enačba:

$$\vec{H}(\vec{r})=-\mathrm{grad}\,V_m(\vec{r})$$

$$\mathrm{div}\,\vec{H}=0 \;\rightarrow\; \mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,V_m\right)=\Delta V_m=0$$

Žal sta takšen potencial $V_m(\vec{r})$ in pripadajoča diferencialna enačba skoraj neuporabna tam, kjer je $\vec{J}(\vec{r})\neq 0$ oziroma v elektrodinamiki, kjer velja $\omega\neq 0$ oziroma $j\omega\vec{D}\neq 0$.

Gostota električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ je vektorska veličina. Njenega učinka zato ne moremo opisati z neko vmesno skalarno veličino, saj skalarna funkcija vsebuje trikrat manj podatkov od vektorske funkcije. Smiselna izbira

bo v tem primeru neka vmesna vektorska veličina. Vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ je definiral že James Clerk Maxwell kot:

$$\vec{B}(\vec{r})=\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r}) \quad \text{oziroma} \quad \vec{H}(\vec{r})=\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r})$$

Nova veličina vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ ima mersko enoto $[\mathrm{Vs/m}]$. Pripadajoče električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ dobimo iz Faradayevega zakona. Električnemu polju smemo dodati poljuben smerni odvod, na primer $-\mathrm{grad}\,V(\vec{r})$, saj je vrtinčenje slednjega vedno enako nič:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=-j\omega\vec{B}=-j\omega\,\mathrm{rot}\,\vec{A} \;\rightarrow\; \mathrm{rot}\left(\vec{E}+j\omega\vec{A}\right)=0$$

$$\vec{E}(\vec{r})=-j\omega\vec{A}(\vec{r})-\mathrm{grad}\,V(\vec{r})$$

Polji $\vec{E}(\vec{r})$ in $\vec{H}(\vec{r})$ lahko torej računamo preko vmesnih veličin, vektorskega potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in skalarnega potenciala $V(\vec{r})$ v poljubni nalogi elektrodinamike, kjer velja $\omega\neq 0$, $\vec{J}(\vec{r})\neq 0$ oziroma $\rho(\vec{r})\neq 0$. Pri tem smo skalarni potencial $V(\vec{r})$ izbrali tako, da je čim bolj podoben tistemu iz elektrostatike. Za oba potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in $V(\vec{r})$ moramo seveda poiskati točne valovne enačbe v elektrodinamiki.

Valovno enačbo za vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ dobimo iz Ampèrejevega zakona:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H}=\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)=\vec{J}+j\omega\epsilon\vec{E}=\vec{J}+\omega^2\epsilon\vec{A}-j\omega\epsilon\,\mathrm{grad}\,V$$

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)=\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}\right)-\Delta\vec{A}$$

$$\Delta\vec{A}+\omega^2\mu\epsilon\vec{A}=-\mu\vec{J}+\mathrm{grad}\left(j\omega\mu\epsilon V+\mathrm{div}\,\vec{A}\right)$$

V vsem dosedanjem izvajanju je bilo določeno samo vrtinčenje vektorskega potenciala $\mathrm{rot}\,\vec{A}$. Izvornost vektorskega potenciala $\mathrm{div}\,\vec{A}$ zaenkrat ni določena, saj je popolnoma neodvisna od vrtinčenja.

Izvornost vektorskega potenciala $\mathrm{div}\,\vec{A}$ lahko izberemo na različne načine. Najbolj preprosta izgleda na prvi pogled Columbova izbira $\mathrm{div}\,\vec{A}=0$ (angleško: Columb gauge). Valovno enačbo za vektorski potencial najbolj poenostavi Lorenzova izbira $j\omega\mu\epsilon V+\mathrm{div}\,\vec{A}=0$ (uvedel

George Francis FitzGerald leta 1888, angleško: Lorenz gauge, po danskem fizike Ludvigu Lorenzu):

$$\Delta \vec{A}(\vec{r})+\omega^2 \mu \epsilon \vec{A}(\vec{r})=-\mu \vec{J}(\vec{r})$$

Z Lorenzovo izbiro je vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ odvisen samo od gostote električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ ter ni odvisen od prostorske elektrine $\rho(\vec{r})$. Iz Gaussovega zakona dobimo še valovno enačbo za skalarni potencial $V(\vec{r})$:

$$\operatorname{div} E=\frac{\rho}{\epsilon}=\operatorname{div}(-j\omega \vec{A}-\operatorname{grad} V)=-\omega^2 \mu \epsilon V-\Delta V$$

$$\Delta V(\vec{r})+\omega^2 \mu \epsilon V(\vec{r})=-\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

Skalarni potencial $V(\vec{r})$ je z Lorenzovo izbiro odvisen samo od prostorske elektrine $\rho(\vec{r})$ ter ni odvisen od gostote električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$. Čeprav ima skalarni potencial $V(\vec{r})$ mersko enoto $[\mathrm{V}]$, ni neposredno povezan z električno napetostjo U, saj je slednja lahko definirana na različne načine oziroma v marsikateri nalogi elektrodinamike sploh ne obstaja.

Lorenzova izbira omogoča, da lepo ločimo učinka elektrine $\rho(\vec{r})$ in toka $\vec{J}(\vec{r})$. Elektrina $\rho(\vec{r})$ je skalarna veličina in poganja skalarni potencial $V(\vec{r})$. Tok $\vec{J}(\vec{r})$ je vektorska veličina in poganja vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$. Pri tem ne smemo pozabiti, da sta tok $\vec{J}(\vec{r})$ in elektrina $\rho(\vec{r})$ povezana z zahtevo za zveznost $j\omega\rho(\vec{r})+\operatorname{div}\vec{J}(\vec{r})=0$ (kontinuitetna enačba).

Konstanta $\omega^2 \mu \epsilon$ nastopa v vseh valovnih enačbah za $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{H}(\vec{r})$, $\vec{A}(\vec{r})$ oziroma $V(\vec{r})$. Konstanto lahko izrazimo na različne načine vključno s hitrostjo valovanja $1/\sqrt{\mu\epsilon}=v[\mathrm{m/s}]$:

$$\omega^2 \mu \epsilon=\frac{\omega^2}{v^2}=k^2 \;\rightarrow\; k=\frac{\omega}{v}=\omega\sqrt{\mu\epsilon}\equiv \textit{valovno} \;\; \textit{število} \left[\frac{\mathrm{rd}}{\mathrm{m}}\right]$$

Valovno število k pove, kako hitro se faza spreminja z razdaljo v prostoru brez izgub, povsem enakovredno kot v eno-dimenzijskem prenosnem vodu brez izgub. V praznem prostoru seveda velja $\epsilon=\epsilon_0$,

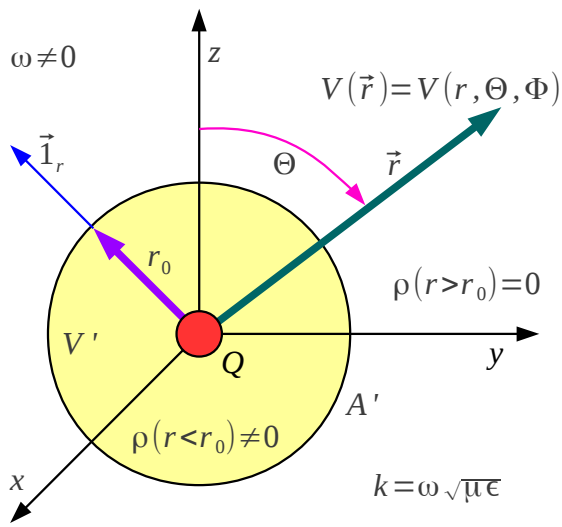
$\mu=\mu_0$, $k=k_0$ in $v=c_0\approx 3\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$. Z valovnim številom k obe valovni enačbi za potenciala preprosto zapišemo v frekvenčnem prostoru:

$$\Delta\vec{A}(\vec{r})+k^2\vec{A}(\vec{r})=-\mu\vec{J}(\vec{r})$$

$$\Delta V(\vec{r})+k^2V(\vec{r})=-\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

Najprej poskusimo poiskati rešitev za skalarno enačbo za $V(\vec{r})$, saj je preprostejša od vektorske enačbe za $\vec{A}(\vec{r})$. Najbolj preprost primer je ena sama točkasta elektrina Q v koordinatnem izhodišču. Takšna elektrina predstavlja singularnost, zato jo omejimo s kroglico s polmerom r_0 :

Točkasta elektrina



Zunaj kroglice $\rho(r>r_0)=0 \rightarrow \Delta V+k^2V=0$

Ugibamo rešitev $V(r,\Theta,\Phi)=\frac{C}{r}e^{-jkr}$

$$\mathrm{grad}\,V=\vec{1}_r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{C}{r}e^{-jkr}\right)=-\vec{1}_rC\left(\frac{1}{r^2}+\frac{jk}{r}\right)e^{-jkr}$$

$$\Delta V=\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,V)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2(-C)\left(\frac{1}{r^2}+\frac{jk}{r}\right)e^{-jkr}\right)$$

$$\Delta V=-\frac{C}{r^2}\left(jk\,e^{-jkr}+(1+jkr)(-jk)e^{-jkr}\right)=-k^2V$$

$$\Delta V+k^2V=-\frac{\rho}{\epsilon} \leftarrow \iiint_{V'} dV'$$

$$\iiint_{V'}\Delta V\,dV'+\iiint_{V'}k^2V\,dV'=\iiint_{V'}-\frac{\rho}{\epsilon}dV'=-\frac{Q}{\epsilon}$$

$$\iiint_{V'}\Delta V\,dV'=\iiint_{V'}\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,V)\,dV'=\oiint_{A'}\mathrm{grad}\,V\cdot\vec{1}_r\,dA'=\mathrm{grad}\,V\cdot\vec{1}_r\,4\pi r_0^2=-4\pi C(1+jkr_0)e^{-jkr_0}$$

$r_0\rightarrow 0$ $\quad -4\pi C(1+jkr)e^{-jkr}\rightarrow -4\pi C$ $\quad -4\pi C=-\frac{Q}{\epsilon}$

$$\iiint_{V'}k^2V\,dV'=\int_0^{r_0}k^2\frac{C}{r}e^{-jkr}4\pi r^2dr\rightarrow 0$$

$$C=\frac{Q}{4\pi\epsilon}$$

$$V(r,\Theta,\Phi)=\frac{Q}{4\pi\epsilon r}e^{-jkr}$$

Zunaj kroglice $r>r_0$ ni elektrin niti singularnosti. Zunaj kroglice rešujemo poenostavljeno valovno enačbo brez izvorov. Rešitev za $V(\vec{r})=V(r,\Theta,\Phi)$ ugibamo v krogelnih koordinatah. V elektrostatiki je potencial točkaste elektrine točno obratno sorazmeren razdalji $1/r$. V elektrodinamiki sklepamo, da bo potencial $V(\vec{r},t)$ zakasnjen učinek elektrine $Q(t')=Q(t-r/v)$. V frekvenčnem prostoru pomeni opisana zakasnitev fazni zasuk $\phi=-kr$, kjer minus pomeni zaostajanje faze.

Diferencialna enačba drugega reda zahteva dve neodvisni rešitvi, v opisanem primeru s členoma e^{+jkr} in e^{-jkr}. Člen e^{+jkr} fizikalno ni smiseln, ker je potencial $V(\vec{r})$ posledica elektrine Q, torej sme biti kvečjemu zakasnjen. Fizikalno torej zadošča rešitev e^{-jkr} in ena sama pripadajoča konstanta C.

V notranjosti kroglice $r<r_0$ smemo poskusiti z enako rešitvijo za potencial $V(\vec{r})$, čeprav elektrina $\rho(\vec{r})$ tam ne bo prav povsod enaka nič. Česar v notranjosti kroglice ne znamo narediti, v singularnosti v koordinatnem izhodišču ne znamo izračunati diferencialnih operacij $\mathrm{grad}\, V$ niti ΔV. Valovno enačbo zato integriramo po celotni prostornini V' kroglice.

Izračun $\Delta V = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, V)$ v singularnosti v koordinatnem izhodišču zaobidemo tako, da integral po prostornini V' kroglice pretvorimo s pomočjo Gaussovega izreka oziroma definicije izvornosti v integral po površini kroglice A', kjer ni singularnosti in znamo izračunati $\mathrm{grad}\, V$. Sam potencial V smemo integrirati po celotni prostornini kroglice singularnosti navkljub, saj je vrednost integrala omejena in gre proti nič, če kroglico manjšamo v nič, $r_0 \to 0$.

V opisani nalogi opazimo, da nam primanjkuje različnih črk! Črko V uporabljamo tako za potencial kot za prostornino kroglice, zato slednjo označimo z V'. Črko A uporabljamo tako za vektorski potencial $\vec{A}$ kot za površino, zato slednjo označimo z A'. Končno, črko ρ uporabljamo tako za gostoto elektrine kot za valjno koordinato, ki v opisani nalogi na srečo ne nastopa.

Integracija desne strani valovne enačbe je preprosta, seštejemo vse elektrine znotraj kroglice. Za eno samo točkasto elektrino Q v koordinatnem izhodišču dobimo $-Q/\epsilon$. Z manjšanjem kroglice v nič $r_0 \to 0$ dobimo iskano konstanto $C = Q/(4\pi\epsilon)$. Rešitev valovne enačbe za skalarni potencial ene same točkaste elektrine Q v koordinatnem izhodišču se torej glasi:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} e^{-jkr}$$

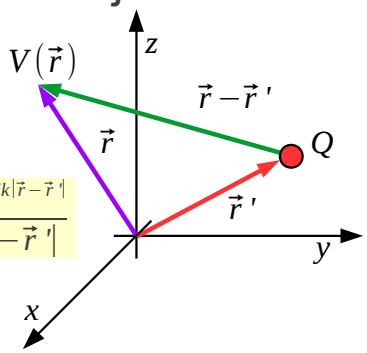
Opisano rešitev valovne enačbe lahko takoj posplošimo za elektrino Q na poljubnih koordinatah $\vec{r}\,'$ tako, da prestavimo izhodišče

koordinatnega sistema. Razdaljo r tedaj nadomesti izraz $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$.

Ker je valovna enačba linearna, je vsota veljavnih rešitev prav tako rešitev iste enačbe. Izraz za potencial ene točkaste elektrine smemo torej razširiti na vsoto potencialov več točkastih elektrin Q_1 , Q_2 , Q_3 … na pripadajočih koordinatah $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ ...

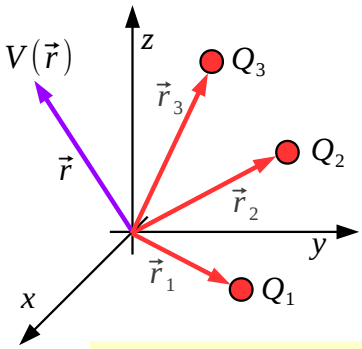
Končno lahko vsoto točkastih elektrin Q_1 , Q_2 , Q_3 … prevedemo na integral prostorske elektrine $\rho(\vec{r}\,')$:

Splošen položaj elektrine



$$V(\vec{r})=\frac{Q}{4\pi\epsilon}\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

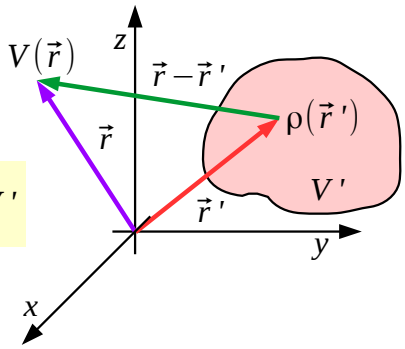
Več elektrin



$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon}\sum_i Q_i\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}_i|}}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$$

Prostorska elektrina

$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint_{V'}\rho(\vec{r}\,')\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$



Valovno enačbo za vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ razstavimo na komponente v kartezičnem koordinatnem sistemu (x,y,z) . Konstantni smerni vektorji slednjega omogočajo preprosto razstavljanje Laplaceja vektorske funkcije $\Delta\vec{A}(\vec{r})$. Dobimo tri skalarne valovne enačbe:

$$\Delta A_x(\vec{r})+k^2A_x(\vec{r})=-\mu J_x(\vec{r})$$

$$\Delta A_y(\vec{r})+k^2A_y(\vec{r})=-\mu J_y(\vec{r})$$

$$\Delta A_z(\vec{r})+k^2A_z(\vec{r})=-\mu J_z(\vec{r})$$

Matematično povsem enakovredno skalarno valovno enačbo za $V(\vec{r})$ smo že rešili. Torej uporabimo isti postopek reševanja tudi za tri skalarne enačbe za komponente vektorskega potenciala $A_x(\vec{r})$, $A_y(\vec{r})$ in $A_z(\vec{r})$. Dobimo tri obrazce za izračun komponent:

$$A_x(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V'} J_x(\vec{r}\,')\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

$$A_y(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V'} J_y(\vec{r}\,')\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

$$A_z(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V'} J_z(\vec{r}\,')\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

Vse tri rešitve lahko preprosto združimo v vektorski zapis, ki velja v poljubnem (tudi krivočrtnem) koordinatnem sistemu:

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V'} \vec{J}(\vec{r}\,')\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

Iz obrazca za izračun vektorskega potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ je razvidno, da ima slednji isto smer kot tok $\vec{J}(\vec{r})$, ki ga poganja. Informacija o smeri gibanja elektrin se torej neposredno prenaša v vektorski potencial. Končni obrazec za izračun vektorskega potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ je silno podoben obrazcu za izračun skalarnega potenciala $V(\vec{r})$:

$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon}\iiint_{V'} \rho(\vec{r}\,')\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

Oba gornja obrazca imata skupno ime: obrazca za zakasnjena potenciala (angleško: retarded potentials). Ime zakasnjena potenciala izvira iz strogega upoštevanja zakasnitve učinka izvora v točki opazovanja potenciala, kar zahteva relativistika.

Med valovnima enačbama za vektorski in skalarni potencial ter obrazcema za izračun vektorskega in skalarnega potenciala je nekaj pomembnih razlik. Valovni enačbi veljata v poljubni točki prostora s koordinatami $\vec{r}$. Izvora $\vec{J}(\vec{r})$ in $\rho(\vec{r})$ imata iste koordinate kot

potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in $V(\vec{r})$ v valovnih enačbah. Rešitev diferencialne valovne enačbe ni samoumevna. Diferencialna enačba naleti na težave ob singularnostih.

Obrazca za izračun vektorskega in skalarnega potenciala uporabljata dvoje različnih koordinat. Koordinate izvorov $\vec{r}\,'$ so označene s črtico kot tudi pripadajoča prostornina V' in podobno. Koordinate izračunanih potencialov so označene brez črtic $\vec{r}$. Koordinate izvorov $\vec{r}\,'$ so pri tem popolnoma neodvisne od koordinat potencialov $\vec{r}$. Pri odvajanju ali integriranju moramo zato paziti, s katerimi koordinatami računamo: s položajem virov $\vec{r}\,'$ ali s položajem učinkov (potencialov) $\vec{r}$?

Integriranje je samoumevno seštevanje učinkov več izvorov. Integriranje je zelo odporno na singularnosti. Integracijo gostote elektrine $\rho(\vec{r})$ zlahka prevedemo na vsoto točkastih elektrin Q_i . Prostorsko integracijo gostote električnega toka $\vec{J}(\vec{r})$ zlahka prevedemo na eno-dimenzijsko integracijo vzdolž žice, ki vodi tok I .

Obrazca za zakasnjena potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ in $V(\vec{r})$ ne vsebujeta vrtinčenja. Do točnega električnega polja $\vec{E}(\vec{r})$ torej lahko pridemo v elektrodinamiki brez magnetnih veličin in brez pravila desnega vijaka! V obrazcu za izračun električnega polja $\vec{E}(\vec{r})$ iz potencialov $\vec{A}(\vec{r})$ in $V(\vec{r})$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\vec{A}(\vec{r}) - \mathrm{grad}\, V(\vec{r})$$

nastopajo samo še koordinate točke $\vec{r}$, kjer v isti točki prostora hkrati opazujemo oba potenciala in polje. Smerni odvod v gornjem obrazcu za $\vec{E}(\vec{r})$ torej računamo po koordinatah $\vec{r}$!

* * * * *

10. Poyntingov izrek

Vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ in skalarni potencial $V(\vec{r})$ sta uporabno matematično orodje za reševanje elektrotehničnih nalog. Ime potencial sicer namiguje na normirano energijo v prostoru. Takšna fizikalna utemeljitev je smiselna, saj sta oba potenciala tesno povezana z energijo premikajočih in mirujočih elektrin.

V elektrostatiki $\omega=0$ določata energijo mirujočih elektrin v prostoru električna poljska jakost $\vec{E}(\vec{r})$ in gostota električnega pretoka $\vec{D}(\vec{r})$. Skalarni produkt $1/2\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{D}(\vec{r})$ določa gostoto električne energije v poljubni točki prostora. Celotno električno energijo dobimo tako, da gostoto energije seštejemo (integriramo) povsod tam, kjer je polje $\vec{E}(\vec{r})\neq 0$ različno od nič:

Električna energija

$$W_e=\frac{1}{2}\iiint_{V'(\vec{E}\neq 0)}\vec{E}(\vec{r})\cdot\vec{D}(\vec{r})dV'=\frac{1}{2}QU=\frac{1}{2}CU^2$$

$\omega=0 \rightarrow \Delta V=-\frac{\rho}{\epsilon}$

$$\mathrm{div}(\epsilon V\,\mathrm{grad}\,V)=(\mathrm{grad}\,\epsilon V)\cdot(\mathrm{grad}\,V)+\epsilon V\,\Delta V=\vec{D}\cdot\vec{E}-V\rho$$

$$V(\infty)=0 \rightarrow \iiint_{V'\rightarrow\infty}\mathrm{div}(\epsilon V\,\mathrm{grad}\,V)dV'=\oiint_{A\rightarrow\infty}(\epsilon V\,\mathrm{grad}\,V)\cdot\vec{1}_n dA=0=\iiint_{V'\rightarrow\infty}(\vec{E}\cdot\vec{D}-\rho V)dV$$

$$W=\frac{1}{2}\iiint_{V'(\rho\neq 0)}\rho(\vec{r})V(\vec{r})dV'=\frac{1}{2}\sum_i Q_i V_i$$

Magnetna energija

$$W_m=\frac{1}{2}\iiint_{V'(\vec{H}\neq 0)}\vec{H}(\vec{r})\cdot\vec{B}(\vec{r})dV'=\frac{1}{2}\Phi I=\frac{1}{2}LI^2$$

$\omega=0 \rightarrow \vec{J}=\mathrm{rot}\,\vec{H}$

$$\mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{H})=\vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A}-\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H}=\vec{H}\cdot\vec{B}-\vec{A}\cdot\vec{J}$$

$$\vec{A}(\infty)=0 \rightarrow \iiint_{V'\rightarrow\infty}\mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{H})dV'=\oiint_{A\rightarrow\infty}(\vec{A}\times\vec{H})\cdot\vec{1}_n dA=0=\iiint_{V'\rightarrow\infty}(\vec{H}\cdot\vec{B}-\vec{J}\cdot\vec{A})dV'$$

$$W=\frac{1}{2}\iiint_{V'(\vec{J}\neq 0)}\vec{J}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})dV'$$

Z uvedbo skalarnega potenciala $V(\vec{r})$ lahko celotno električno energijo izračunamo tudi na drugačen način. Pri izpeljavi uporabimo poenostavljeno valovno enačbo $\Delta V=-\rho/\epsilon$ za statiko $\omega=0$. Hkrati

moramo privzeti, da je skalarni potencial v neskončnosti $V(\infty)=0$ enak nič. Seštevamo (integriramo) le tam, kjer je gostota prostorske elektrine $\rho(\vec{r})\neq 0$ različna od nič. Izračun se še dodatno poenostavi, če poznamo potenciale elektrod V_i in pripadajoče elektrine na njih Q_i . Žal poenostavljen račun ne pove, kje se dejansko nahaja električna energija v prostoru.

V magnetostatiki $\omega=0$ določata energijo magnetna poljska jakost $\vec{H}(\vec{r})$ in gostota magnetnega pretoka $\vec{B}(\vec{r})$. Skalarni produkt $1/2\,\vec{H}(\vec{r})\cdot\vec{B}(\vec{r})$ določa gostoto magnetne energije v poljubni točki prostora. Celotno magnetno energijo dobimo tako, da gostoto energije seštejemo (integriramo) povsod tam, kjer je polje $\vec{H}(\vec{r})\neq 0$ različno od nič.

Z uvedbo vektorskega potenciala $\vec{A}(\vec{r})$ lahko celotno magnetno energijo izračunamo tudi na drugačen način. Pri izpeljavi uporabimo poenostavljen Ampèrejev zakon $\mathrm{rot}\,\vec{H}=\vec{J}$ za statiko $\omega=0$. Hkrati moramo privzeti, da je vektorski potencial v neskončnosti $\vec{A}(\infty)=0$ enak nič. Seštevamo (integriramo) le tam, kjer je gostota električnega toka $\vec{J}(\vec{r})\neq 0$ različna od nič. Žal poenostavljen račun ne pove, kje se dejansko nahaja magnetna energija v prostoru.

V električnih vezjih sposobnost hranjenja električne energije opisuje kapacitivnost C kondenzatorjev. Sposobnost hranjenja magnetne energije opisujeta lastna induktivnost L in medsebojna induktivnost M tuljav. Podobno kot skalarni potencial $V(\vec{r})$ pomaga določiti kapacitivnost C kondenzatorjev, lahko vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ pomaga določiti lastno induktivnost L oziroma medsebojno induktivnost M tuljav.

Pri določanju medsebojne induktivnosti M izračunamo celoten magnetni pretok Φ s seštevanjem gostote magnetnega pretoka $\vec{B}_1$ skozi presek A_2 izbrane tuljave oziroma žične zanke. Seštevanje $\vec{B}_1=\mathrm{rot}\,\vec{A}_1$ po preseku tuljave prevedemo s pomočjo Stokesovega izreka oziroma definicije vrtinčenja na krivuljni integral vektorskega potenciala $\vec{A}_1$ po sklenjeni zanki.

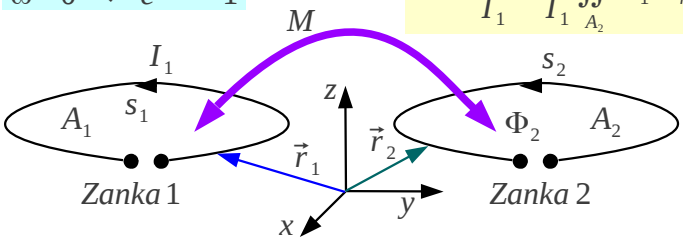
Sam vektorski potencial $\vec{A}_1$ izračunamo s pomočjo obrazca za zakasnjeni potencial. Ker je medsebojna induktivnost M definirana samo za nizke frekvence oziroma statiko $\omega=0$, kjer so zakasnitve v prostoru nepomembne, zaostajanja faze ni treba upoštevati. Oba računa lahko združimo v skupni izraz za medsebojno induktivnost, kjer magnetne veličine

niti vektorski produkt sploh ne nastopajo:

Medsebojna induktivnost

$\omega=0 \rightarrow e^{-jkr}=1$

$$M=\frac{\Phi_2}{I_1}=\frac{1}{I_1}\iint_{A_2}\vec{B}_1\cdot\vec{1}_n dA_2=\frac{1}{I_1}\iint_{A_2}\mathrm{rot}\,\vec{A}_1\cdot\vec{1}_n dA_2=\frac{1}{I_1}\oint_{s_2}\vec{A}_1\cdot\vec{1}_{s2}ds_2$$

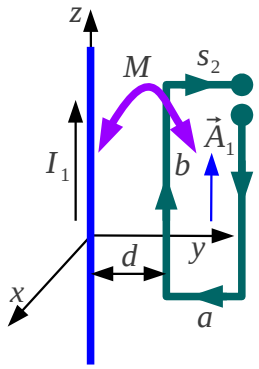


$$\vec{A}_1=\frac{\mu}{4\pi}\oint_{s_1}\frac{\vec{1}_{s1}I_1}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}ds_1$$

$$M=\frac{\mu}{4\pi}\oint_{s_1}\oint_{s_2}\frac{\vec{1}_{s1}\cdot\vec{1}_{s2}}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|}ds_1 ds_2$$

Zgled

$$\vec{A}_1=\frac{\mu}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{1}_z I_1}{\sqrt{\rho^2+z'^2}}dz'=\vec{1}_z\frac{\mu I_1}{4\pi}\lim_{h\to\infty}\int_{-h}^{+h}\frac{dz'}{\sqrt{\rho^2+z'^2}}=\vec{1}_z\frac{\mu I_1}{4\pi}\lim_{h\gg\rho}\ln\frac{h+\sqrt{\rho^2+h^2}}{-h+\sqrt{\rho^2+h^2}}$$



$$\vec{A}_1=\vec{1}_z\frac{\mu I_1}{4\pi}\lim_{h\gg\rho}\ln\frac{\left(h+\sqrt{\rho^2+h^2}\right)^2}{\rho^2}=\vec{1}_z\frac{\mu I_1}{2\pi}\left(\lim_{h\gg\rho}\ln\left(h+\sqrt{\rho^2+h^2}\right)-\ln\rho\right)$$

$$\lim_{h\gg\rho}\ln\left(h+\sqrt{\rho^2+h^2}\right)=\lim_{h\gg\rho}\ln\left(2h+\frac{\rho^2}{2h}\right)=ln2h=C$$

$$\vec{A}_1=\vec{1}_z\frac{\mu I_1}{2\pi}(C-\ln\rho)$$

$$M=\frac{1}{I_1}\oint_{s_2}\vec{A}_1\cdot\vec{1}_{s2}ds_2=\frac{1}{I_1}\left[\vec{A}_1(\rho=d)\cdot\vec{1}_z b-\vec{A}_1(\rho=d+a)\cdot\vec{1}_z b\right]=\frac{\mu b}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

Medsebojna induktivnost sicer lahko ima oba predznaka glede na izbiro priključkov obeh tuljav oziroma referenčnih oznak tokov. Povsem jasno pa predznak medsebojne induktivnosti ne sme biti odvisen od izbire desnoročnega ali levoročnega koordinatnega sistema niti od izbire predznaka magnetnih veličin v Maxwellovih enačbah.

Račun medsebojne induktivnosti preko vektorskega potenciala dodatno znižuje red naloge. Izračun gostote magnetnega pretoka $\vec{B}_1$ prve zanke je eno-dimenzijski integral, seštevanje $\vec{B}_1$ po preseku A_2 druge zanke je dvo-dimenzijski integral, skupaj torej integracija v treh dimenzijah.

Izračun vektorskega potenciala $\vec{A}_1$ prve zanke je eno-dimenzijski integral, seštevanje $\vec{A}_1$ po krivulji s_2 druge zanke je eno-dimenzijski integral. Skupaj torej integracija v dveh dimenzijah oziroma ena dimenzija manj glede na račun preko $\vec{B}_1$, kar pri številskem reševanju nalog sploh ni zanemarljivo!

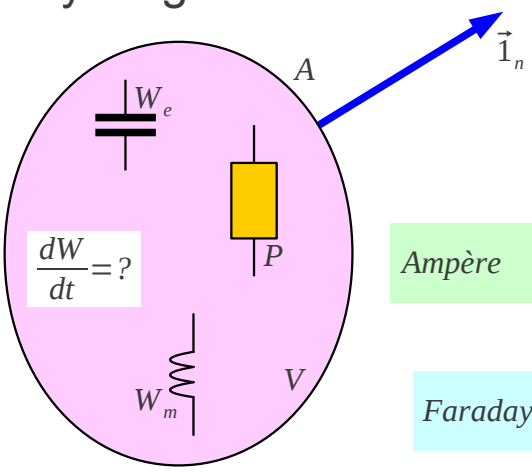
Kot zgled je prikazan izračun medsebojne induktivnosti med zelo dolgim vodnikom v osi z in pravokotno žično zanko s stranicama a in b na

oddaljenosti d od dolgega vodnika. Pri izračunu vektorskega potenciala $\vec{A}_1$ naletimo na težavo, slednji postane neskončno velik za neskončno dolg vodnik. Vektorski potencial $\vec{A}_1$ zato izračunamo za zelo dolg vodnik dolžine $2h$, kjer velja $h \gg \rho$ v področju pravokotne zanke.

Vektorski potencial $\vec{A}_1(\rho)$ je v bližnji okolici zanke odvisen samo od ρ. Vse ostalo združimo v eno veliko konstanto C, ki ni odvisna od ρ v področju zanke. Konstanta C se pri integraciji vzdolž stranic b natančno odšteje. Integracija vzdolž stranic a ne daje nobenega rezultata, saj sta vektorja v skalarnem produktu pravokotna med sabo. Končni rezultat je seveda popolnoma enak tistemu iz osnov elektrotehnike z neposrednim izračunom $\vec{B}_1$ in njegovo integracijo po površini zanke.

V elektrodinamiki imamo običajno prisotni obe vrsti energije: električno energijo W_e mirujočih elektrin in magnetno energijo W_m premikajočih elektrin. Povrhu se lahko energija v elektrodinamiki s časom spreminja oziroma potuje po prostoru. Izračun odvoda skupne energije po času dW/dt je opisal Maxwellov učenec John Henry Poynting leta 1884:

Poyntingov izrek



$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{E}\cdot\vec{D}\,dV + \frac{1}{2}\iiint_V \vec{H}\cdot\vec{B}\,dV$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\iiint_V \vec{E}\cdot\vec{D}\,dV\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\iiint_V \vec{H}\cdot\vec{B}\,dV\right]$$

Ampère $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,\vec{H} - \vec{J}$ $\quad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right] = \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H} - \vec{E}\cdot\vec{J}$

Faraday $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\,\vec{E}$ $\quad \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right] = \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E}$

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_V \vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H}\,dV - \iiint_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV - \iiint_V \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E}\,dV$$

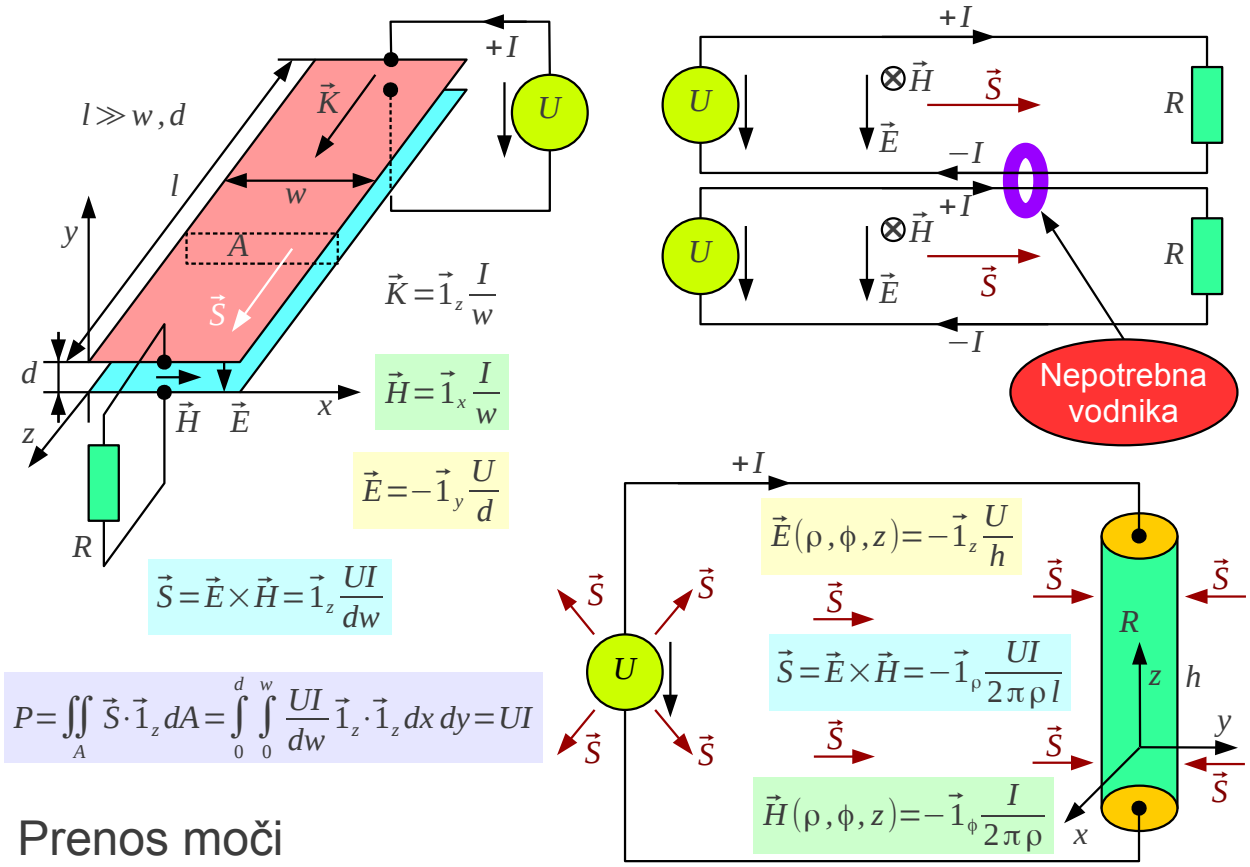
$$\frac{dW}{dt} = \iiint_V (\vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H} - \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E})\,dV - \iiint_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV = -\iiint_V \mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H})\,dV - P \qquad P = \iiint_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV$$

$$\frac{dW}{dt} = -\oiint_A (\vec{E}\times\vec{H})\cdot\vec{1}_n\,dA - \iiint_V \vec{E}\cdot\vec{J}\,dV = -\oiint_A \vec{S}\cdot\vec{1}_n\,dA - P \qquad \vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$$

V izbrani prostornini V se skupna energija W, shranjena v

kondenzatorjih kot W_e in v tuljavah kot W_m, zmanjšuje iz dveh razlogov. Prvič, energija W lahko odteka (ali priteka) skozi sklenjeno ploskev A, ki oklepa izbrano prostornino V. Drugič, energija W se lahko pretvarja v toploto kot moč P na uporih R znotraj prostornine V.

Gostoto pretoka moči skozi izbrano ploskev A opisuje Poyntingov vektor $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$, ki ima mersko enoto $[\mathrm{W/m^2}]$. Poyntingov vektor odgovori na vprašanje, kje sploh potuje energija po prostoru? V primeru trakastega dvovoda imamo od nič različni električno poljsko jakost $\vec{E}$ in magnetno poljsko jakost $\vec{H}$ v praznem prostoru med trakovoma. Moč torej ne potuje po kovinskih trakovih, pač pa po vmesnem prostoru:



Prenos moči

Če namestimo dve takšni napravi eno nad drugo: dva enaka vira, dva enaka trakasta dvovoda in dve enaki bremeni, hitro ugotovimo, da sta srednja vodnika povsem odveč. Električni tok po teh dveh sicer teče, ampak v nasprotnih smereh, da je vsota enaka nič. Če oba srednja vodnika izločimo in zaporedno vežemo vira na eni strani ter bremeni na drugi strani, se pretok električne moči prav nič ne spremeni.

Če izračunamo električno polje $\vec{E}$ in magnetno polje $\vec{H}$ v okolici valjastega upora, lahko ugotovimo, kako električna moč vstopa v upor.

Električna moč vstopa v upor bočno v smeri $-\vec{1}_\rho$ iz praznega prostora. Električni tok teče skozi upor skozi priključka v osi v smeri $-\vec{1}_z$, torej pravokotno na pretok moči!

V frekvenčnem prostoru upoštevamo, da sta $\vec{E}$ in $\vec{H}$ kazalca in sta običajno navedena z vršnimi vrednostmi, ko ni izrecno drugače označeno. Medsebojni fazni kot dobimo preko konjugirano-kompleksne vrednosti magnetne poljske jakosti $\vec{H}*$. Poyntingov vektor je tedaj kompleksen:

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}*=\vec{E}_{eff}\times\vec{H}_{eff}*$$

Podobno kot pri kompleksni moči $P=U\,I*/2$ predstavlja realni del Poyntingovega vektorja $\mathrm{Re}[\vec{S}]$ gostoto delovne moči. Imaginarni del Poyntingovega vektorja $\mathrm{Im}[\vec{S}]$ predstavlja gostoto jalove moči oziroma je merilo za energijo, ki niha v prostoru.

Poyntingov vektor $\vec{S}$ je popolnoma definiran tudi takrat, ko smeri vektorjev $\vec{E}$ in $\vec{H}$ sploh ne poznamo natančno. Primer je sončna svetloba, ki je nepolarizirano valovanje v dokaj širokem frekvenčnem spektru. Ne poznamo niti točne frekvence niti smeri vektorjev $\vec{E}$ in $\vec{H}$ sončne svetlobe.

V neposredni bližini Zemlje znaša Poyntingov vektor sončne svetlobe $\vec{S}_v\approx\vec{1}_r 1400\,\mathrm{W/m^2}$ izven ozračja v vesolju, kjer smernik $\vec{1}_r$ kaže proč od Sonca. Ozračje vpije in odbije nekaj sončne svetlobe, da površino Zemlje doseže komaj $\vec{S}_z\approx\vec{1}_r 1000\,\mathrm{W/m^2}$ ob lepem jasnem dnevu. Vsa ta električna moč prepotuje razdaljo skoraj $r=150\cdot 10^6\,\mathrm{km}$ od Sonca do Zemlje po povsem praznem prostoru, brez kakršnihkoli kovinskih vodnikov.

Poyntingov vektor $\vec{S}$ je od vseh opisanih fizikalnih veličin tista, ki nam najbolj nazorno opisuje dogajanje v električni napravi. Poyntingov vektor $\vec{S}$ tudi preprosto merimo, na primer preko količine toplote, ki se razvija v črnem telesu. Podobno kot električna moč P niti Poyntingov vektor $\vec{S}$ ne nosi informacije o fazi, frekvenci, spektru ali polarizaciji elektromagnetnega polja.

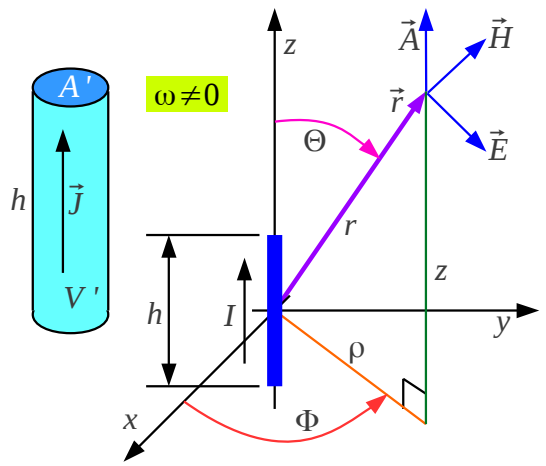
* * * * *

11. Elektromagnetno sevanje

Navidez preprosta elektrotehnična naloga je izračun elektromagnetnega polja $\vec{H}(\vec{r})$ in $\vec{E}(\vec{r})$, ki ga poganja tok I v kratkem odseku žice dolžine h, kar imenujemo tokovni element. Račun si poenostavimo tako, da žico (vir) postavimo v koordinatno izhodišče in računamo polje (učinek) v krogelnih koordinatah (r,Θ,Φ). V magnetostatiki $\omega=0$ sta opisano nalogo rešila Jean-Baptiste Biot in Félix Savart že davnega leta 1820, torej kar nekaj let pred Ampèrejem in Faradayem.

V elektrodinamiki $\omega\neq 0$ isto nalogo poskusimo rešiti preko potencialov. Gostota električnega toka $\vec{J}(\vec{r}\,')$ v žici poganja vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ v prostoru okoli žice. Račun si poenostavimo tako, da integriramo gostoto toka $\vec{J}(\vec{r}\,')$ po preseku žice A' v tok I in privzamemo, da je odsek žice kratek v primerjavi s točko opazovanja polja $h\ll r$ in hkrati kratek v primerjavi z valovno dolžino $h\ll\lambda$:

Tokovni element



$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int_{V'}\vec{J}(\vec{r}\,')\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dV'$$

$$\vec{J}(\vec{r}\,')=\vec{1}_z\frac{I}{A'}$$

$$dV'=A'dz'$$

$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int_{-h/2}^{h/2}\vec{1}_z I\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}dz'$$

$$(1)\quad h\ll r\ \rightarrow\ \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\approx\frac{1}{r}$$

$$(2)\quad h\ll\lambda=\frac{2\pi}{k}\ \rightarrow\ e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\approx e^{-jkr}$$

$$\vec{A}(\vec{r})=\vec{1}_z\frac{\mu I h}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}$$

$$\vec{1}_z=\vec{1}_r\cos\Theta-\vec{1}_\Theta\sin\Theta$$

$$\vec{A}(\vec{r})=\left(\vec{1}_r\cos\Theta-\vec{1}_\Theta\sin\Theta\right)\frac{\mu I h}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}$$

$$\vec{H}(\vec{r})=\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})$$

$$\vec{H}(\vec{r})=\frac{Ih}{4\pi}\frac{1}{r^2\sin\Theta}\begin{vmatrix}\vec{1}_r & r\vec{1}_\Theta & r\sin\Theta\vec{1}_\Phi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\Theta} & \frac{\partial}{\partial\Phi}\\ \frac{e^{-jkr}}{r}\cos\Theta & -r\frac{e^{-jkr}}{r}\sin\Theta & 0\end{vmatrix}=\vec{1}_\Phi\frac{Ih}{4\pi}e^{-jkr}\left(\frac{jk}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\Theta$$

Sevanje

Biot-Savart

Rezultat za vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ pretvorimo v krogelne

koordinate, da z izračunom vrtinčenja pridemo do pripadajoče magnetne poljske jakosti $\vec{H}(\vec{r})$. Elektrodinamika $\omega \neq 0$ zanesljivo dodaja rezultatu zakasnitev e^{-jkr} . Poleg zakasnitve vsebuje rezultat še dodaten člen jk/r v primerjavi z Biot-Savartovim zakonom iz magnetostatike. Biot-Savartov člen $1/r^2$ je pri majhnih razdaljah r in nizkih frekvencah (majhen $k=\omega/v$) dosti večji od dodatnega člena jk/r , da slednjega sploh ne opazimo.

Dodatni člen jk/r postaja čedalje pomembnejši z večanjem razdalje r in višanjem frekvence (višanjem k). Pri velikih razdaljah r in visokih frekvencah ω dodatni člen jk/r povsem prevlada, saj tam Biot-Savartov člen $1/r^2$ popolnoma presahne. Pri velikih razdaljah r in visokih frekvencah ω ima pripadajoče elektromagnetno polje povsem drugačne lastnosti. Opisani pojav imenujemo elektromagnetno sevanje.

Biot-Savartov zakon sicer opisuje magnetno polje kratkega odseka žice, ampak pri tem privzema, da več takšnih kratkih odsekov sestavlja sklenjeno zanko s tokom I . En sam odsek žice v statiki fizikalno ni smiseln, saj električni tok I ne more izvirati iz nič na začetku žice niti ponikniti v nič na koncu žice.

V elektrodinamiki $\omega \neq 0$ opisuje ponor oziroma izvor toka zahteva za zveznost toka in elektrine:

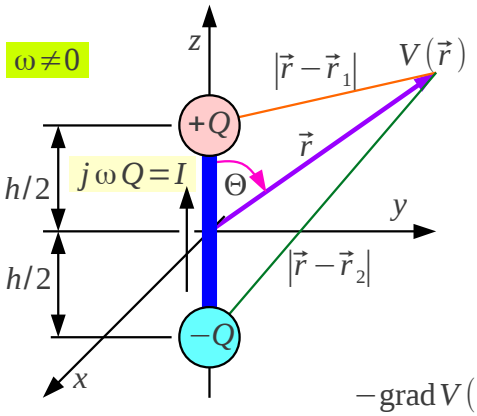
$$I = \pm \frac{dQ}{dt} = \pm j\omega Q$$

Osamljen odsek žice s tokom I je v elektrodinamiki fizikalno popolnoma utemeljen, če ga dopolnimo z elektrinama $-Q$ in $+Q$ na začetku in na koncu žice. Elektrini $-Q$ in $+Q$ poganjata skalarni potencial $V(\vec{r})$. Izračun slednjega si poenostavimo, če upoštevamo, da sta elektrini $-Q$ in $+Q$ na majhni razdalji $h \ll \lambda$ v primerjavi z valovno dolžino in hkrati na majhni razdalji $h \ll r$ v primerjavi s točko opazovanja $V(\vec{r})$.

Ker sta elektrini $-Q$ in $+Q$ enako veliki ampak nasprotnih predznakov, se pri razvoju funkcij v vrste največji členi med sabo natančno uničujejo. Pri poenostavitvah razdalje $|\vec{r}-\vec{r}_i|$, faze $e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}_i|}$, amplitude $1/|\vec{r}-\vec{r}_i|$ in nadaljnjem računanju moramo zato upoštevati vsaj dva največja člena razvoja v vrsto posamezne funkcije:

Zveznost toka in elektrine

$\omega \neq 0$



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\sum_i Q_i \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}_i|}}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \qquad Q_i = \pm Q = \pm\frac{I}{j\omega}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}_i| = \sqrt{r^2 + (h/2)^2 \mp 2r(h/2)\cos\Theta} \approx r \mp \frac{h}{2}\cos\Theta$$

$$e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}_i|} \approx e^{-jkr}\left(1 \pm \frac{jkh}{2}\cos\Theta\right) \qquad \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_i|} \approx \frac{1}{r}\left(1 \pm \frac{h}{2r}\cos\Theta\right)$$

$$V(\vec{r}) \approx \frac{Qh}{4\pi\epsilon r} e^{-jkr}\left(jk + \frac{1}{r}\right)\cos\Theta$$

$$-\operatorname{grad} V(\vec{r}) = \frac{Qh}{4\pi\epsilon} e^{-jkr}\left[\vec{1}_r\left(-\frac{k^2}{r} + \frac{2jk}{r^2} + \frac{2}{r^3}\right)\cos\Theta + \vec{1}_\Theta\left(\frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)\sin\Theta\right]$$

$$-j\omega\vec{A}(\vec{r}) = -j\omega\left(\vec{1}_r\cos\Theta - \vec{1}_\Theta\sin\Theta\right)\frac{\mu(j\omega Q)h}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{Qh}{4\pi\epsilon}e^{-jkr}\left[\vec{1}_r\frac{k^2}{r}\cos\Theta - \vec{1}_\Theta\frac{k^2}{r}\sin\Theta\right]$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\vec{A}(\vec{r}) - \operatorname{grad} V(\vec{r})$$

Sevanje

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Qh}{4\pi\epsilon}e^{-jkr}\left[\vec{1}_r\left(\frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)2\cos\Theta + \vec{1}_\Theta\left(-\frac{k^2}{r} + \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)\sin\Theta\right]$$

Točkasti statični dipol

$$\mu\omega^2 = \frac{k^2}{\epsilon}$$

Ampère $\vec{J}(\vec{r}) = 0$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{j\omega\epsilon}\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r})$$

Osamljen odsek žice s tokom I v elektrodinamiki poganja poleg magnetnega polja $\vec{H}(\vec{r})$ tudi električno polje $\vec{E}(\vec{r})$. Slednje izračunamo iz obeh potencialov po izrazu:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\vec{A}(\vec{r}) - \operatorname{grad} V(\vec{r})$$

Popolnoma enak rezultat za električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ dobimo iz Ampèrejevega zakona. Pri tem upoštevamo, da je gostota električnega toka skoraj povsod v prostoru $\vec{J}(\vec{r}) = 0$ enaka nič razen v žici v koordinatnem izhodišču. Maxwellove enačbe pri tem niso bližnjica, saj zahtevajo izbiro predznaka magnetnih veličin, izbiro desnosučnega koordinatnega sistema in dvakratni izračun vrtinčenja. Neposredna pot do električnega polja $\vec{E}(\vec{r})$ preko potencialov ne zahteva nič od navedenega:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{j\omega\epsilon}\operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{j\omega\epsilon}\operatorname{rot}\left[\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\vec{A}(\vec{r})\right)\right]$$

Električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ lahko izrazimo s tokom I ali z elektrinama $-Q$ in $+Q$. Izraz z elektrinama je povsem smiseln tudi v statiki $\omega = 0$ in $k = 0$, ko preostala člena natančno ustrezata izrazu za potencial $V(\vec{r})$

točkastega statičnega električnega dipola. Slednji vsebuje par (enako velikih) elektrin nasprotnih predznakov $-Q$ in $+Q$ na majhni razdalji $h \ll r$ in njegov potencial $V(\vec{r})$ upada obratno sorazmerno kubu $1/r^3$ razdalje.

Tokovni element je z drugimi besedami točkasti dinamični električni dipol. Pri $\omega = 0$ električni dipol vsebuje le dve elektrini $-Q$ in $+Q$, ki mirujeta na pripadajočih elektrodah. Pri $\omega \neq 0$ električni dipol potrebuje še tok I v žici, da na elektrodi izmenično privede oziroma od tam odvede elektrini $-Q$ in $+Q$.

Poleg opisa statičnega točkastega dipola vsebuje izraz za električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ še več dinamičnih členov. Podobno kot izraz za magnetno polje $\vec{H}(\vec{r})$ tudi izraz za električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ vsebuje člen $-k^2/r$, ki upada obratno sorazmerno $1/r$ z razdaljo in opisuje elektromagnetno sevanje. Preostala dinamična člena jk/r^2 opisujeta energijo, ki niha v bližnji okolici električnega dipola.

Pomen posameznih členov je odvisen od razdalje opazovanja r in frekvence $\omega = 2\pi f$, ki določa valovno število $k = \omega / v$ oziroma v praznem prostoru $k_0 = \omega / c_0$. Na majhnih razdaljah in pri nizkih frekvencah prevladujeta statična člena $1/r^3$. Na velikih razdaljah in pri visokih frekvencah prevladuje sevanje $-k^2/r$.

Praktični pomen posameznih členov je prikazan v spodnji tabeli za tri značilne naloge elektrotehnike: elektroenergetsko omrežje, radio in svetlobo. V laboratorijskem poskusu na razdalji $r = 1\,\mathrm{m}$ velikost posameznih členov neposredno opisuje valovno število k oziroma njegov kvadrat k^2:

Primerjava nalog elektrotehnike	Omrežna frekvenca v energetiki $f = 50\,\mathrm{Hz}$	Radijski brezvrvični telefon $f = 900\,\mathrm{MHz}$	Zelena vidna svetloba $\lambda = 0.5\,\mu\mathrm{m}$ $f = 600\,\mathrm{THz}$
Valovno število k	$1.05 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{rd/m}$	$18.9\,\mathrm{rd/m}$	$1.26 \cdot 10^{7}\,\mathrm{rd/m}$
k^2	$1.15 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{rd^2/m^2}$	$355\,\mathrm{rd^2/m^2}$	$1.58 \cdot 10^{14}\,\mathrm{rd^2/m^2}$
Členi so enako veliki pri $r = 1/k$	$955\,\mathrm{km}$	$5.3\,\mathrm{cm}$	$80\,\mathrm{nm}$

Za opis in načrtovanje večine elektroenergetskih naprav popolnoma

zadoščata elektrostatika in magnetostatika. Na razdalji $r = 1\,\mathrm{m}$ so členi k oziroma k^2 manjši od pogreška vseh razpoložljivih merilnih inštrumentov! V elektroenergetiki opazimo pojave elektrodinamike šele pri daljnovodih, daljših od nekaj sto kilometrov!

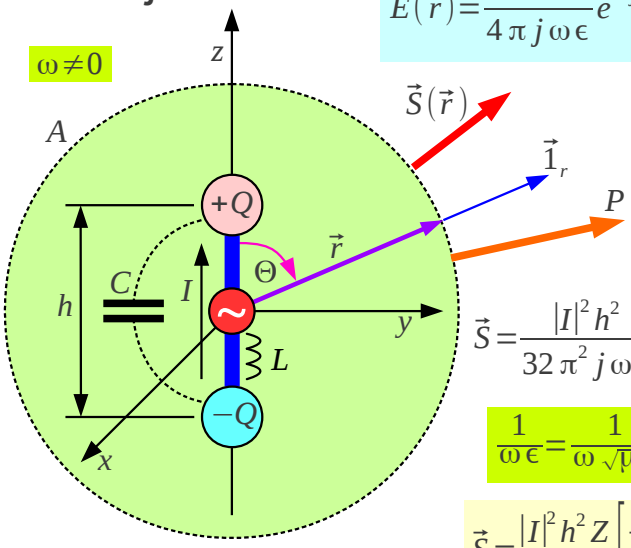
Večino pojavov vidne svetlobe popolnoma opisuje elektromagnetno sevanje. Statična člena in preostala dinamična člena so zanemarljivo majhni v primerjavi s sevanjem celo v notranjosti mikroskopsko majhnega čipa polprevodniškega laserja ali fotodiode. Sevanje, dinamična člena in statična člena so približno enako veliki na razdalji $r = 80\,\mathrm{nm}$ oziroma komaj nekaj sto atomov ali molekul snovi.

V področju radijskih frekvenc so sevanje, dinamična člena in statična člena istega velikostnega razreda na razdaljah preprostega laboratorijskega poskusa, to se pravi nekaj centimetrov do nekaj metrov. Ker primerni merilni pripomočki za področje radijskih frekvenc niso bili dostopni, sta se elektrotehnika (statika) in optika (sevanje) dolga stoletja obravnavali povsem ločeno. Šele Heinrich Rudolf Hertz je s poskusi leta 1889 končno povezal elektrotehniko in optiko.

Elektromagnetno sevanje je dodaten pojav, ki nima razlage v elektrostatiki niti v magnetostatiki. Razlika med statiko in sevanjem je najbolj očitna v pogledu energije oziroma moči. Različne pojave statike in sevanja zato nazorno opisuje Poyntingov vektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^* / 2$ gostote pretoka moči. Slednjega preprosto določimo iz znanega električnega in magnetnega polja katerekoli naprave, v tem primeru točkastega dinamičnega električnega dipola:

Sevanje moči

$\omega \neq 0$



$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{I h}{4\pi j\omega\epsilon}e^{-jkr}\left[\vec{1}_r\left(\frac{jk}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right)2\cos\Theta+\vec{1}_\Theta\left(-\frac{k^2}{r}+\frac{jk}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right)\sin\Theta\right]$$

$$\vec{H}(\vec{r})=\vec{1}_\Phi\frac{I h}{4\pi}e^{-jkr}\left(\frac{jk}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\Theta$$

$$\text{Poynting}\quad \vec{S}(\vec{r})=\frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}(\vec{r})^*$$

$$\vec{S}=\frac{|I|^2h^2}{32\pi^2 j\omega\epsilon}\left[\vec{1}_r\left(\frac{jk^3}{r^2}+\frac{1}{r^5}\right)\sin^2\Theta-\vec{1}_\Theta\left(\frac{k^2}{r^3}+\frac{1}{r^5}\right)2\cos\Theta\sin\Theta\right]$$

$$\frac{1}{\omega\epsilon}=\frac{1}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}=\frac{Z}{k}$$

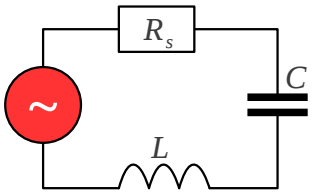
$$Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\approx 120\pi\,\Omega\approx 377\,\Omega$$

$$\vec{S}=\frac{|I|^2h^2Z}{32\pi^2}\left[\vec{1}_r\left(\frac{k^2}{r^2}-\frac{j}{kr^5}\right)\sin^2\Theta+\vec{1}_\Theta\left(\frac{jk}{r^3}+\frac{j}{kr^5}\right)2\cos\Theta\sin\Theta\right]$$

$$P=\oiint_{A\to\infty}\vec{S}(\vec{r})\cdot\vec{1}_r\,dA$$

$$P=\oiint_{r\to\infty}\vec{S}(\vec{r})\cdot\vec{1}_r\,r^2\sin\Theta\,d\Theta\,d\Phi$$

$$R_s=\frac{2P}{|I|^2}=\frac{h^2Zk^2}{6\pi}=\frac{2\pi Z}{3}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2$$



$$P=\frac{|I|^2h^2Z}{32\pi^2}k^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\Theta\,d\Theta\,d\Phi=\frac{|I|^2h^2Z}{32\pi^2}k^2\frac{4}{3}2\pi=\frac{|I|^2h^2Zk^2}{12\pi}$$

Izračunani Poyntingov vektor $\vec{S}(\vec{r})$ ima realni in imaginarni del. Imaginarni del je jalova moč, torej energija, ki niha v bližnji okolici točkastega dinamičnega električnega dipola. Nihajoča energija vsebuje električno energijo in magnetno energijo, kar je skladno razlagam iz elektrostatike in magnetostatike. Magnetno energijo vsebuje induktivnost L žice, električno energijo pa kapacitivnost C med koncema žice.

Realni del Poyntingovega vektorja $\vec{S}(\vec{r})$ pomeni delovno moč. Delovna moč nima razlage niti v elektrostatiki niti v magnetostatiki, saj naprava ne vsebuje nobene snovi z izgubami $\gamma\neq 0$ oziroma nobenih uporov R niti feromagnetnih jeder z izgubami? Opisano napravo sestavljata le kovinska žica z neskončno veliko prevodnostjo $\gamma=\infty$ (ni padca napetosti $U=0$) in neskončno velik prazen prostor okoli nje μ_0 , ϵ_0 brez vsakršnih izgub $\gamma=0$, torej brez prevodnih tokov $\vec{J}(\vec{r})=0$.

Iz Poyntingovega vektorja $\vec{S}(\vec{r})$ razberemo, da delovna moč potuje iz koordinatnega središča, kjer se nahaja dinamični električni dipol, v vseh smereh v neskončnost. Če seštejemo pretok moči skozi površino krogle, ki oklepa izhodišče koordinatnega sistema, dobimo na poljubni razdalji r povsod enako delovno moč $\mathrm{Re}[P]$. Na velikih razdaljah $r\to\infty$ jalova moč povsem presahne, seštevanje pretoka skozi površino krogle daje tam

povsem delovno moč $P(\infty)=\mathrm{Re}[P]$.

Fizikalna razlaga pravi, da majhen dinamični električni dipol seva delovno moč $\mathrm{Re}[P]$. Moč $\mathrm{Re}[P]$ potuje proč od dinamičnega dipola in se pri tem razširja v prostoru. Moč $\mathrm{Re}[P]$ potuje v neskončnost in se nikoli več ne vrne k izvoru v koordinatnem izhodišču.

Nadomestno vezje majhnega dinamičnega električnega dipola moramo dopolniti. V koordinatno izhodišče postavimo izmenični vir, ki bo poganjal tok I v dinamičnem električnem dipolu. Izmenični vir občuti zaporedno vezavo treh bremen: induktivnost žice L dinamičnega dipola, kapacitivnosti med koncema žice C in sevalno upornost R_s .

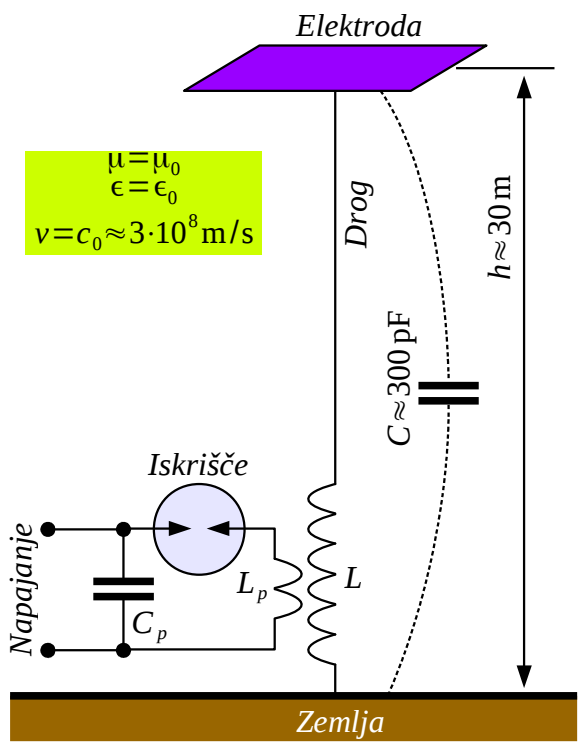
Sevalna upornost R_s pomeni za izmenični vir delovno breme, čeprav naprava ne vsebuje nobenega upora oziroma drugačne snovi z izgubami. Preko sevalne upornosti R_s izmenični vir dovaja delovno moč $\mathrm{Re}[P]$, ki se nato izseva v prostor, razširja skoraj v vse smeri (z izjemo osi z) in pri tem potuje v neskončnost.

Pojav sevanja delovne moči $\mathrm{Re}[P]$ in pripadajoče sevalne upornosti R_s ni vedno preprosto opaziti. Nikola Tesla je konec 19. stoletja izdelal številne visokofrekvenčne transformatorje z izkoriščanjem rezonance sekundarnega navitja v frekvenčnem področju okoli $f\approx 30\,\mathrm{kHz}$. Največje naprave, izdelane okoli leta 1900 so bile visoke tudi do $h\approx 30\,\mathrm{m}$:

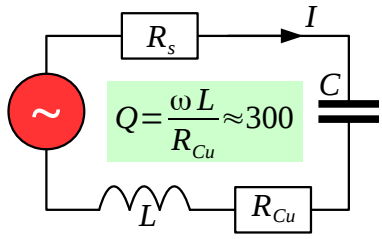
Teslov transformator

$$f \approx 30\,\mathrm{kHz}$$
$$\omega = 2\pi f \approx 1.885 \cdot 10^5\,\mathrm{rd/s}$$
$$\lambda = \frac{c_0}{f} \approx 10\,\mathrm{km}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi\,\Omega$$



$$R_s = \frac{2\pi Z_0}{3}\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \approx 80\pi^2\,\Omega\left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 \approx 7.1\,\mathrm{m}\Omega$$



$$Q = \frac{\omega L}{R_{Cu}} \approx 300$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \approx 17.68\,\mathrm{k}\Omega$$

$$R_{Cu} = \frac{\omega L}{Q} \approx 58.9\,\Omega$$

$$\eta = \frac{P_s}{P_s + P_{Cu}} = \frac{R_s}{R_s + R_{Cu}} \equiv \textit{sevalni izkoristek}$$

$$\eta \approx \frac{0.0071\,\Omega}{0.0071\,\Omega + 58.9\,\Omega} \approx 1.2 \cdot 10^{-4}$$

Teslovi transformatorji proizvajajo zelo visoke napetosti in dolge električne obloke (iskre) podobne naravnim strelam. Teslov transformator je običajno dosti manjši od valovne dolžine $h \ll \lambda \approx 10\,\mathrm{km}$, kar natančno ustreza opisu točkastega dinamičnega električnega dipola. Zaradi tega Teslov transformator ni učinkovit sevalec. Sevalna upornost znaša v opisanem primeru komaj $R_s \approx 0.0071\,\Omega = 7.1\,\mathrm{m}\Omega$.

Če ocenimo kapacitivnost sekundarnega nihajnega kroga na $C \approx 300\,\mathrm{pF}$ in upoštevamo, da kakovost tuljave L iz bakrene žice brez feromagnetnega jedra ne more preseči vrednosti $Q \approx 300$, znaša upornost bakrenega navitja tuljave $R_{Cu} \approx 58.9\,\Omega$. Razmerje med izsevano močjo in celotno močjo, ki jo dovajamo sekundarnemu LC nihajnemu krogu, imenujemo sevalni izkoristek. V opisanem primeru Teslovega transformatorja je sevalni izkoristek zelo slab, komaj $\eta \approx 0.00012$.

Če je Nikola Tesla hotel izsevati $P = 1\,\mathrm{W}$ moči, je potreboval v sekundarnem navitju transformatorja vsaj $P_2 = 8\,\mathrm{kW}$ visokofrekvenčne moči. Z upoštevanjem izgub v primarnem nihajnem krogu $L_p C_p$ in izkoristka pretvorbe nizkofrekvenčne moči v visokofrekvenčno moč v iskrišču je potreboval Nikola Tesla več sto kW nizkofrekvenčne moči!

Pri frekvenci Teslovega transformatorja $f \approx 30\,\mathrm{kHz}$ so sevanje, dinamična člena in statična člena električnega polja $\vec{E}(\vec{r})$ istega velikostnega razreda na razdalji:

$$r = \frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi} \approx 1.59\,\mathrm{km}$$

Po razpoložljivih podatkih je Nikola Tesla izvedel večino poskusov v bližnji okolici svojega transformatorja, kjer prevladujeta statično električno in magnetno polje. Razlik med statiko in sevanjem verjetno sploh ni opazil, saj je iskal predvsem čim večje električno polje v neposredni bližini naprave. V nobenem primeru Nikola Tesla ni mogel izmeriti sevalne upornosti R_s , saj je bila za štiri velikostne razrede ali celo večkrat manjša od izgub R_{Cu} v navitjih njegovih transformatorjev.

Sevanje Teslovega transformatorja je neučinkovito, ker je naprava zelo majhna $h \ll \lambda \approx 10\,\mathrm{km}$ v primerjavi z valovno dolžino. Guglielmo Marconi je s številnimi poskusi pravilno ugotovil, da sevanje Teslovega transformatorja narašča predvsem z višanjem droga h oziroma večanjem dolžine žice, ki je nanj priključena. Marconi je učinkovitejšo sevalno napravo poimenoval »antena« po latinskem izrazu za tipalke žuželk podobnih oblik in z njo vzpostavil prvo prekooceansko radijsko zvezo leta 1901.

* * * * *

12. Preproste antene

Elektromagnetno sevanje ima drugačne lastnosti od elektromagnetnega polja v neposredni bližini iste naprave. Teslov transformator zelo učinkovito proizvaja veliko električno polje $\vec{E}$ in visoko napetost U v svoji neposredni okolici. Hkrati je isti Teslov transformator povsem neučinkovit sevalec, ker je zelo majhen $h \ll \lambda \approx 10\,\mathrm{km}$ v primerjavi z valovno dolžino. Razlika je tudi v fizikalni razlagi: bližnje elektromagnetno polje opisuje nihajočo energijo oziroma jalovo moč, sevanje pa potujočo energijo oziroma delovno moč.

Skromen opis različnih anten, to je naprav, ki oddajajo oziroma sprejemajo elektromagnetno sevanje, zahteva dosti več od enega poglavja v knjigi. Če preprosto večamo višino h Teslovega transformatorja, poenostavitve v prikazani izpeljavi elektromagnetnega polja tokovnega elementa niso več veljavne. Ko postane višina $h \approx \lambda$ primerljiva z valovno dolžino, niti porazdelitev toka $I(z')$ vzdolž žice ni več konstanta. Končno se nismo niti vprašali, v katere smeri v prostoru sploh seva opisana naprava?

To poglavje skuša odgovoriti na nekaj preprostih vprašanj o antenah. Kako doseči sevanje še na drugačen način, brez silno velikega električnega polja $\vec{E}$ ali magnetnega polja $\vec{H}$ v neposredni bližini naprave? Kakšne lastnosti ima elektromagnetno sevanje? Kako izdelati preprosto anteno, ki bo učinkovito sevala oziroma sprejemala sevanje? Kako in kje se lahko pojavi sevanje, ko si tega mogoče ne pričakujemo niti želimo?

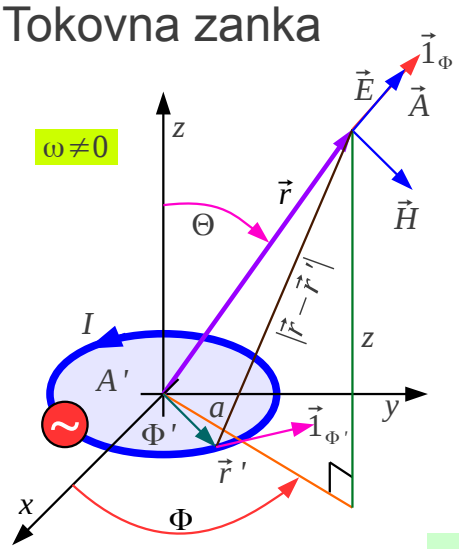
Preprost zgled je majhna krožna tokovna zanka. Izmenični vir poganja v žični zanki tok I. Če je polmer zanke $a \ll \lambda$ dosti manjši od valovne dolžine, lahko privzamemo, da se tok I vzdolž žice ne spreminja. Ker tok I nikjer ne izvira niti nikjer ne ponikne, ni mirujočih elektrin $\rho(\vec{r}\,')$ niti pripadajočega skalarnega potenciala $V(\vec{r})=0$. Elektromagnetno polje majhne krožne zanke v celoti določa vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$, ki ga poganja tok I.

Za preprost račun postavimo zanko v koordinatno izhodišče v vodoravno ravnino xy. Vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ računamo v krogelnih koordinatah (r,Θ,Φ), ki so za naloge sevanja najprimernejše. Razdaljo $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ med virom in potencialom izračunamo po Pitagorovem izreku tako, da koordinate vira (a,Θ',Φ') in koordinate potenciala (r,Θ,Φ)

pretvorimo v pripadajoče kartezične koordinate. Vrteča smernika $\vec{1}_\Phi$ in $\vec{1}_{\Phi'}$ zapišemo s konstantnima smernikoma $\vec{1}_x$ in $\vec{1}_y$ kartezičnega koordinatnega sistema.

Račun si poenostavimo tako, da privzamemo, da je polmer zanke majhen v primerjavi z oddaljenostjo točke opazovanja polja $a \ll r$ in hkrati majhen v primerjavi z valovno dolžino $a \ll \lambda$. Med integracijo se smernik $\vec{1}_{\Phi'}$ zavrti za polni kot, zato se prispevki za vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ med sabo odštevajo oziroma se pri razvoju funkcij v vrste največji členi med sabo natančno uničujejo. Pri poenostavitvah razdalje $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$, faze $e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$, amplitude $1/|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ in nadaljnjem računanju moramo zato upoštevati vsaj dva največja člena razvoja v vrsto posamezne funkcije:

Tokovna zanka



$$\vec{A}(\vec{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int_0^{2\pi}\vec{1}_{\Phi'}\,I\,\frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,a\,d\Phi'$$

Polmer zanke $a=|\vec{r}\,'|$

$$\vec{1}_\Phi=-\vec{1}_x\sin\Phi+\vec{1}_y\cos\Phi \qquad \vec{1}_{\Phi'}=-\vec{1}_x\sin\Phi'+\vec{1}_y\cos\Phi'$$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'|=\sqrt{\begin{array}{l}(r\sin\Theta\cos\Phi-a\cos\Phi')^2+\\+(r\sin\Theta\sin\Phi-a\sin\Phi')^2+(r\cos\Theta)^2\end{array}}$$

$$a \ll r \;\rightarrow\; |\vec{r}-\vec{r}\,'|\approx r-a\sin\Theta\cos(\Phi-\Phi')$$

$$(1)\quad a \ll r \;\rightarrow\; \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\approx\frac{1}{r}\left[1+\frac{a}{r}\sin\Theta\cos(\Phi-\Phi')\right]$$

$$(2)\quad a \ll \lambda \;\rightarrow\; e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\approx e^{-jkr}\left[1+jka\sin\Theta\cos(\Phi-\Phi')\right]$$

$$\vec{A}(\vec{r})=\vec{1}_\Phi\frac{\mu\,I(\pi a^2)}{4\pi}e^{-jkr}\left(\frac{jk}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\Theta$$

Površina zanke $A'=\pi a^2$

$$\rho(\vec{r}\,')=0 \;\rightarrow\; V(\vec{r})=0$$

$$\vec{E}(\vec{r})=-j\omega\vec{A}(\vec{r})-\mathrm{grad}\,V(\vec{r})=-\vec{1}_\Phi\frac{j\omega\mu IA'}{4\pi}e^{-jkr}\left(\frac{jk}{r}+\frac{1}{r^2}\right)\sin\Theta=\vec{1}_\Phi\frac{ZIA'}{4\pi}e^{-jkr}\left(\frac{k^2}{r}-\frac{jk}{r^2}\right)\sin\Theta$$

$$\vec{H}(\vec{r})=\frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r})=\frac{IA'}{4\pi}e^{-jkr}\left[\vec{1}_r\left(\frac{jk}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right)2\cos\Theta+\vec{1}_\Theta\left(-\frac{k^2}{r}+\frac{jk}{r^2}+\frac{1}{r^3}\right)\sin\Theta\right]$$

$$Z=\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Dodaten račun bi pokazal, da dobimo povsem enak vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ za majhno žično zanko poljubne oblike v ravnini xy pod pogojem, da je površina zanke A' enaka. V rezultatu zato nadomestimo polmer zanke a s površino zanke $A'=\pi a^2$.

Električna poljska jakost $\vec{E}(\vec{r})$ je neposredno sorazmerna vektorskemu potencialu $\vec{A}(\vec{r})$, saj mirujočih elektrin ni in je skalarni

potencial $V(\vec{r})=0$ enak nič. V končnem zapisu $\vec{E}(\vec{r})$ izrazimo z valovno impedanco snovi (praznega prostora) $Z=\sqrt{\mu/\epsilon}$. Magnetno poljsko jakost $\vec{H}(\vec{r})$ dobimo z izračunom vrtinčenja vektorskega potenciala $\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r})$.

Izraza za elektromagnetno polje majhne žične zanke sta navidez podobna izrazom za elektromagnetno polje tokovnega elementa, vendar sta vlogi $\vec{E}(\vec{r})$ in $\vec{H}(\vec{r})$ med sabo zamenjani! Majhna tokovna zanka je torej dualni zgled tokovnega elementa. Tokovni element je točkasti električni dipol v elektrodinamiki. Majhna tokovna zanka je točkasti magnetni dipol v elektrodinamiki.

Točkasti magnetni dipol ima močno statično magnetno polje $\vec{H}(\vec{r})$ v neposredni bližini, kar opisujeta oba člena $1/r^3$. Oba izraza za magnetno polje $\vec{H}(\vec{r})$ in za električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ vsebujeta člen $\pm k^2/r$, ki upada obratno sorazmerno $1/r$ z razdaljo in opisuje elektromagnetno sevanje. Preostali dinamični členi jk/r^2 opisujejo energijo, ki niha v bližnji okolici tokovne zanke.

Majhna tokovna zanka $a \ll \lambda$ oziroma $A' \ll \lambda^2$ ima zelo močno magnetno polje $\vec{H}(\vec{r})$ v svoji bližnji okolici $r \ll 1/k$. Med dvema zankama na majhni razdalji $r \ll 1/k$ zato opazimo samo sklop preko medsebojne induktivnosti $M=\alpha/r^3$, ki upada s tretjo potenco razdalje in je povsem statičen pojav. Šele na velikih razdaljah $r \gg 1/k$ med dvema zankama opazimo dinamični pojav, to je sklop preko sevanja.

Izračun Poyntingovega vektorja $\vec{S}(\vec{r})$, izsevane moči P in sevalne upornosti R_s pokaže, da niti majhna tokovna zanka $a \ll \lambda$ ni kdovekako učinkovit sevalec. Sevalna upornost R_s je sorazmerna četrti potenci frekvence ω^4 , kar se skriva v valovnem številu k^4 oziroma je R_s obratno sorazmerna četrti potenci valovne dolžine $1/\lambda^4$.

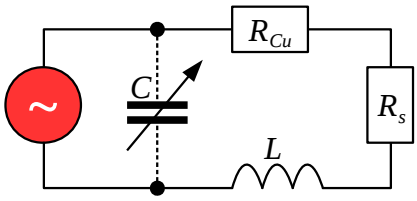
Nadomestno vezje majhne tokovne zanke vključuje induktivnost zanke L in upornost žice R_{Cu} . Pojav sevanja dodaja še razmeroma majhno sevalno upornost R_s . Vse omenjene impedance so za nekaj velikostnih razredov nižje kot v primeru tokovnega elementa. Prilagoditev impedance na izvor in izničenje jalove komponente običajno dosežemo z nastavljivim kondenzatorjem C , ki ga vežemo vzporedno izvoru:

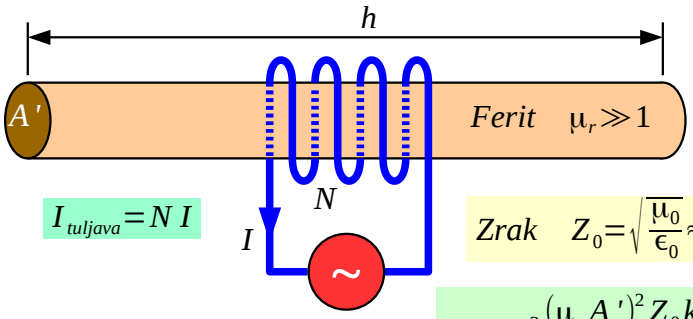
$$\vec{S}(\vec{r})=\frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}(\vec{r})^*=\frac{|I|^2(A')^2Z}{32\pi}\left[\vec{1}_r\left(\frac{k^4}{r^2}+\frac{jk}{r^5}\right)\sin^2\Theta-\vec{1}_\Theta\left(\frac{jk^3}{r^3}+\frac{jk}{r^5}\right)2\cos\Theta\sin\Theta\right]$$

$$P=\oiint_{A\to\infty}\vec{S}(\vec{r})\cdot\vec{1}_r\,dA=\frac{|I|^2(A')^2Z}{32\pi}k^4\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^3\Theta\,d\Theta\,d\Phi=\frac{|I|^2(A')^2Zk^4}{32\pi}k^4\frac{4}{3}2\pi=\frac{|I|^2(A')^2Zk^4}{12\pi}$$

$$R_s=\frac{2P}{|I|^2}=\frac{(A')^2Zk^4}{6\pi}=\frac{8\pi^3(A')^2Z}{3\lambda^4}=\frac{8\pi^3Z}{3}\left(\frac{A'}{\lambda^2}\right)^2$$

Sevanje zanke





$h\gg\sqrt{A'}\ \rightarrow\ A_{eff}\approx\mu_r A'$

$f\approx1\,\mathrm{MHz}$
$A'\approx1\,\mathrm{cm}^2$
$h\approx20\,\mathrm{cm}$
$\mu_r\approx100$
$N\approx30$
$R_s\approx0.35\,\mu\Omega$

$I_{tuljava}=N\,I$

Zrak $Z_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\approx377\,\Omega$

$$R_s=N^2\frac{(\mu_r A')^2Z_0k^4}{6\pi}=\frac{8\pi^3(N\mu_r A')^2Z_0}{3\lambda^4}=\frac{8\pi^3Z_0}{3}\left(\frac{N\mu_r A'}{\lambda^2}\right)^2$$

Feritna antena

Sevalno upornost majhne zanke lahko povečamo tako, da zanko izdelamo kot tuljavo z N ovoji. Izsevana moč P je sorazmerna kvadratu vsote tokov v vseh ovojih oziroma kvadratu števila ovojev N^2, torej se tudi sevalna upornost poveča za faktor N^2. Večanje števila ovojev žal prinaša višjo induktivnost L in daljšo žico z višjo upornostjo R_{Cu}.

Če tuljavo navijemo na feromagnetno jedro, lahko še dodatno povečamo sevanje. Če je feritna palica zadosti dolga $h\gg\sqrt{A'}$, se sevalna upornost poveča za kvadrat μ_r^2 njene relativne permeabilnosti. Feromagnetno jedro žal povečuje induktivnost L in dodaja lastne izgube.

Feritna antena v srednje-valovnem radijskem sprejemniku $\lambda\approx300\,\mathrm{m}$ vsebuje feritno palico dolžine $h\approx20\,\mathrm{cm}$ in preseka $A'\approx1\,\mathrm{cm}^2$. Razpoložljivi feritni materiali dosegajo $\mu_r\approx100$ z zmernimi izgubami pri frekvenci $f\approx1\,\mathrm{MHz}$. Če na takšno palico navijemo tuljavo z $N\approx30$ ovoji, dosežemo sevalno upornost komaj $R_s\approx0.35\,\mu\Omega$!

Feritna antena ni učinkovit sevalec. Njena uporaba v radijskem sprejemniku je smiselna v okolju, kjer prevladuje močno električno polje motenj $\vec{E}_m(\vec{r})$, magnetno polje motenj $\vec{H}_m(\vec{r})\approx0$ pa je zanemarljivo

majhno. Dodatna uporaba feritne antene je v zvezah kratkega dosega preko statičnega induktivnega sklopa, ki hitro upada $M=\alpha/r^3$ s tretjo potenco razdalje in na ta način omejuje neželjen sklop do sosednjih naprav.

Če želimo izdelati res učinkovit sevalec, si moramo bolj natančno ogledati lastnosti izsevanega elektromagnetnega polja, kar je še najbolj nazorno v krogelnih koordinatah (r,Θ,Φ) z virom v koordinatnem izhodišču. Na velikih razdaljah $r \gg 1/k$ so spremembe amplitude majhne.

Odvodi po prečnih smereh $\partial/\partial\Theta$ in $\partial/\partial\Phi$ opisujejo samo spremembe amplitude. Laméjevi koeficienti poskrbijo, da postanejo odvodi po pripadajočih dolžinskih elementih $\partial/\partial l_\Theta \approx 0$ in $\partial/\partial l_\Phi \approx 0$ zanemarljivo majhni, kar poenostavlja izračun polja iz potencialov.

Razdalja r vzdolž smeri širjenja valovanja vpliva na amplitudo in fazo. Odvod faze se ne zmanjšuje z razdaljo, saj je odvisen samo od valovnega števila k. Na velikih razdaljah se odvod po vzdolžni razdalji poenostavi v $\partial/\partial r \approx -jk$, vektorski operator odvajanja pa v $\nabla \approx \vec{1}_r(-jk)$:

Poenostavitve za sevanje

$$\vec{A}(\vec{r})=\alpha I e^{-jkr}\vec{F}(r,\Theta,\Phi)$$

$$\textit{Daljava} \quad r \gg \frac{1}{k}=\frac{\lambda}{2\pi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\approx -jk \quad \frac{\partial}{\partial\Theta}\approx 0 \quad \frac{\partial}{\partial\Phi}\approx 0$$

$$\nabla \approx \vec{1}_r(-jk)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r})\approx\frac{1}{r^2\sin\Theta}\begin{vmatrix}\vec{1}_r & r\vec{1}_\Theta & r\sin\Theta\,\vec{1}_\Phi\\ -jk & 0 & 0\\ A_r & r A_\Theta & r\sin\Theta\, A_\Phi\end{vmatrix}=\nabla\times\vec{A}(\vec{r})=\vec{1}_\Theta jk A_\Phi-\vec{1}_\Phi jk A_\Theta$$

$$\textit{Brez } A_r$$

$$\vec{H}(\vec{r})=\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\vec{A}(\vec{r})\approx\vec{1}_\Theta\frac{jk}{\mu}A_\Phi-\vec{1}_\Phi\frac{jk}{\mu}A_\Theta$$

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{j\omega\epsilon}\nabla\times\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{A}(\vec{r})\right)\approx -j\omega\left[\vec{A}(\vec{r})-\vec{1}_r\left(\vec{1}_r\cdot\vec{A}(\vec{r})\right)\right]=-j\omega\left(\vec{1}_\Theta A_\Theta+\vec{1}_\Phi A_\Phi\right)$$

$$\frac{|\vec{E}(\vec{r})|}{|\vec{H}(\vec{r})|}=Z$$

$$\vec{S}(\vec{r})=\frac{1}{2}\vec{E}(\vec{r})\times\vec{H}(\vec{r})^*\approx\vec{1}_r\frac{\omega^2}{2Z}\left(|A_\Theta|^2+|A_\Phi|^2\right)$$

$$\textit{Samo delovna moč!}$$

$$\vec{1}_r\perp\vec{H}(\vec{r})\perp\vec{E}(\vec{r})\perp\vec{1}_r$$

Zgled tokovni element

$$\vec{A}(\vec{r})=\left(\vec{1}_r\cos\Theta-\vec{1}_\Theta\sin\Theta\right)\frac{\mu I h}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}$$

$$\vec{H}(\vec{r})\approx\vec{1}_\Phi\frac{jk}{4\pi}I h\frac{e^{-jkr}}{r}\sin\Theta$$

$$\vec{E}(\vec{r})\approx\vec{1}_\Theta\frac{jkZ}{4\pi}I h\frac{e^{-jkr}}{r}\sin\Theta$$

$$\vec{S}(\vec{r})\approx\vec{1}_r\frac{k^2 Z|I|^2 h^2}{32\pi^2}\frac{\sin^2\Theta}{r^2}$$

Vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ vedno kaže v smeri gibanja elektrin s

hitrostjo $\vec{v}(\vec{r}\,')$ oziroma smeri gostote toka $\vec{J}(\vec{r}\,')$ skladno z rešitvijo pripadajoče valovne enačbe. Poenostavljen izraz za vrtinčenje povsem izloči vzdolžno (radialno) komponento A_r vektorskega potenciala. Elektrine torej nikoli ne sevajo v smeri svojega gibanja.

Ostali dve (prečni) komponenti vektorskega potenciala A_Θ in A_Φ se morata s časom spreminjati. Potovanje sprememb v prostoru dodaja zakasnitev, ki daje od nič različen odvod faze $\partial/\partial r \approx -jk \neq 0$. Sevanje torej zahteva pospešeno gibanje elektrin $\partial\vec{v}/\partial t = j\omega\vec{v} = \vec{a} \neq 0$ skladno z relativistiko!

Izsevano električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ na velikih razdaljah $r \gg 1/k$ dobimo preprosto iz prečnih komponent A_Θ in A_Φ vektorskega potenciala. Z Lorenzovo izbiro $j\omega\mu\epsilon V(\vec{r}) + \mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r}) = 0$ se na velikih razdaljah učinka vzdolžne komponente vektorskega potenciala A_r in skalarnega potenciala $V(\vec{r})$ natančno izničujeta med sabo. Izsevano električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ nima vzdolžne komponente!

Pripadajoče magnetno polje $\vec{H}(\vec{r})$ je sofazno z električnim poljem $\vec{E}(\vec{r})$, je z njim v točnem razmerju valovne impedance $|\vec{E}|/|\vec{H}| = Z$ in je v prostoru nanj pravokotno $\vec{H} \perp \vec{E}$. Oba sta pravokotna na smer razširjanja valovanja $\vec{E} \perp \vec{1}_r$ in $\vec{H} \perp \vec{1}_r$, torej prečno valovanje TEM (transverzalno elektro-magnetno).

Vektorski potencial $\vec{A}(\vec{r})$ fizikalno predstavlja normirano energijo premikajočih elektrin. V elektrodinamiki $\omega \neq 0$ spremembe energije potujejo po prostoru v smeri sevanja. Potujoča energija pomeni delovno moč $\mathrm{Re}[P] \neq 0$, ki se razširja proč od vira sevanja. Na velikih razdaljah $r \gg 1/k$ kaže Poyntingov vektor $\vec{S}(\vec{r}) \| \vec{1}_r$ v smer razširjanja valovanja in je povsem realen, torej vsebuje sevanje samo delovno moč!

Poenostavljene izraze za sevanje lahko takoj preizkusimo na preprostem zgledu, na primer na tokovnem elementu. Žal tokovni element, Teslov transformator, ni učinkovit sevalec prav zaradi močnega bližnjega polja. Učinkovito sevanje narekuje napravo, ki že v neposredni bližini ustvarja elektromagnetno polje z vsemi značilnostmi sevanja: sofaznost, razmerje Z in pravokotnost med $\vec{E}(\vec{r})$ in $\vec{H}(\vec{r})$ ter smerjo razširjanja $\vec{1}_r$.

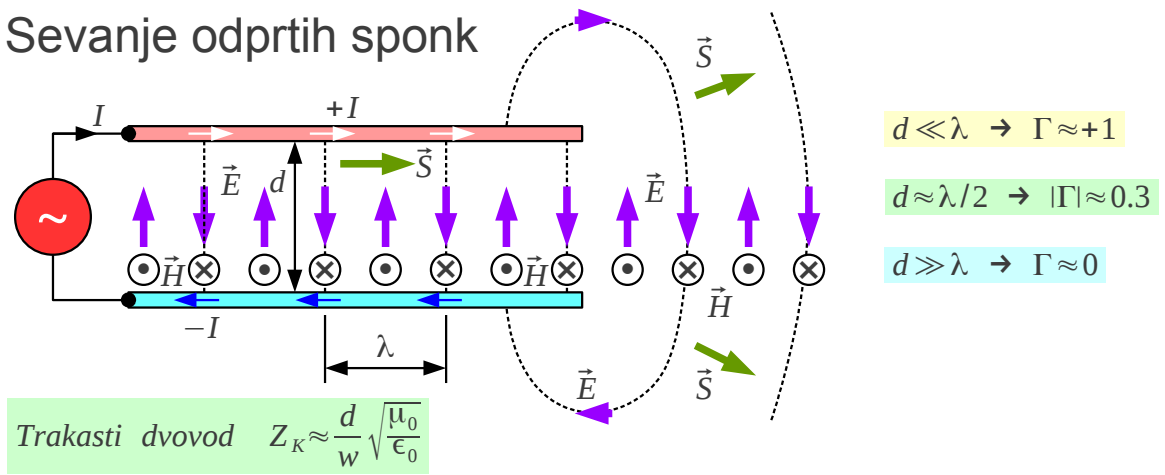
Elektromagnetno polje z vsemi omenjenimi značilnostmi sevanja ima na primer napredujoči TEM val v trakastem dvovodu. Vse značilnosti sevanja

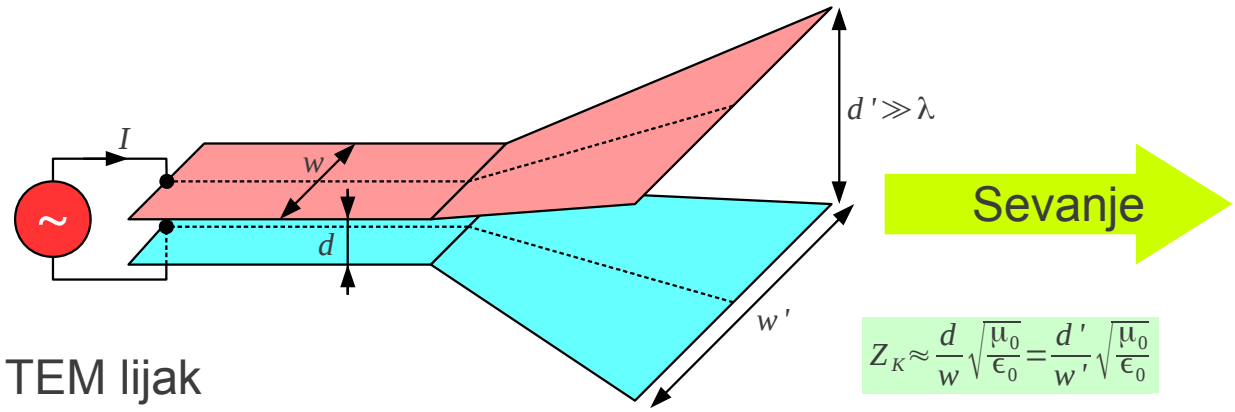
ima tako glavnina elektromagnetnega polja v prostoru med trakovoma kot razmeroma šibko stresano elektromagnetno polje zunaj trakov. Edina razlika je v tem, da se električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ med vodnikoma trakastega dvovoda zaključuje oziroma izvira na kovinskih vodnikih.

Kaj se zgodi, če vodnika prekinemo? Ko je razdalja med vodnikoma $d \ll \lambda$ dosti manjša do valovne dolžine, se valovanje na odprtih sponkah v celoti odbije z enako fazo $\Gamma \approx +1$. Tudi moč napredujočega vala P_N se v celoti pretvori v moč odbitega vala P_O . Porazdeljena induktivnost L/l in porazdeljena kapacitivnost C/l trakastega dvovoda natančno opisujeta gornje pojave.

Ko postane razdalja med vodnikoma $d \approx \lambda/2$ primerljiva polovici valovne dolžine, opis s porazdeljeno induktivnostjo L/l in porazdeljeno kapacitivnostjo C/l ne zadošča več. Tik ob površini vodnika se nekaj valovanja sicer odbije na koncu vodnika. Valovanje v prostoru med vodnikoma pa doseže informacija o koncu vodnikov z zakasnitvijo!

Pri razdalji med vodnikoma $d \approx \lambda/2$ informacija o koncu vodnikov doseže valovanje točno sredi obeh vodnikov z zakasnitvijo cele četrt periode! Z zakasnjeno informacijo, to se pravi informacijo z napačno fazo, se valovanje točno sredi obeh vodnikov sploh ne odbije, pač pa nadaljuje svojo pot v isti smeri v prostoru:



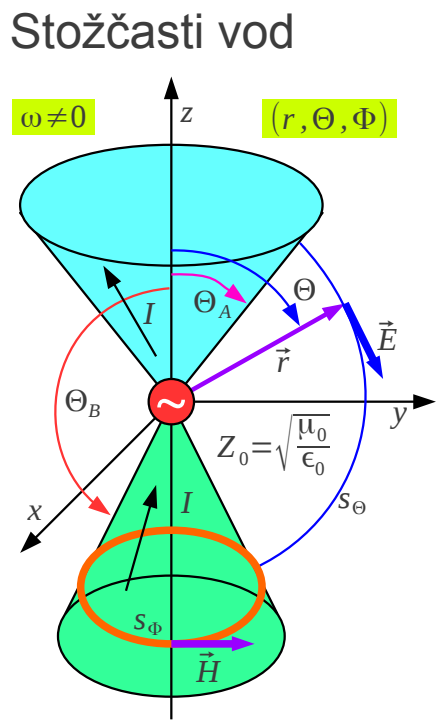


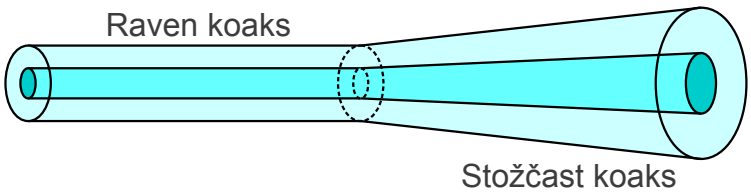
Pri razdalji med vodnikoma $d \approx \lambda/2$ znaša odbojnost odprtih sponk približno $|\Gamma| \approx 0.3$, odvisno od točne geometrije vodnikov. Od odprtih sponk se v tem primeru odbije manj kot desetina moči P_N napredujočega vala. Večina moči napredujočega vala preprosto nadaljuje svojo pot in se razširja v povsem praznem prostoru.

Ko je razdalja med vodnikoma $d \gg \lambda$ večja od valovne dolžine, odboj na koncih obeh vodnikov nima skoraj nobenega vpliva na večino elektromagnetnega polja z izjemo bližnje okolice vodnikov. Odbojnost odprtih sponk dvovoda $\Gamma \approx 0$ je tedaj zanemarljivo majhna. Skoraj vsa moč napredujočega vala P_N nadaljuje svojo pot v isti smeri in se razširja kot sevanje v praznem prostoru.

Gornji opis odboja na odprtih sponkah narekuje izdelavo preproste in učinkovite antene, TEM piramidnega lijaka. Izmenični vir priključimo na trakasti dvovod z razmeroma majhnimi prečnimi izmerami $d \ll \lambda$ in $w \ll \lambda$, kjer je sevanje zanemarljivo majhno. Prečne izmere nato počasi večamo in pri tem ohranjamo medsebojno razmerje, da ne pride do odboja valovanja. Končne izmere $d' > \lambda/2$ in $w' > \lambda/2$ izberemo tako velike, da odprti konec piramidnega dvovoda učinkovito seva.

Na podoben način lahko pretvorimo raven koaksialni kabel v stožčast koaksialni kabel. V stožčastem vodu sploh ni nujno, da sta stožca eden znotraj drugega. Učinkovit sevalec lahko izdelamo tako, da ima prvi stožec kot odprtja $\Theta_A<\pi/2$ manjši od pravega kota, drugi stožec pa kot odprtja $\Theta_B>\pi/2$ večji od pravega kota. Izmenični vir preprosto priključimo med vrhova obeh kovinskih stožcev:





Ugibam $\vec{E}(\vec{r})=\vec{1}_\Theta\frac{C}{r\sin\Theta}e^{-jkr}$

Preverim Gauss $\mathrm{div}\left(\epsilon\vec{E}(\vec{r})\right)=0$

Faraday izračunam $\vec{H}(\vec{r})=\frac{j}{\omega\mu}\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r})=\vec{1}_\Phi\frac{C/Z_0}{r\sin\Theta}e^{-jkr}$

Preverim Ampère $\vec{J}(\vec{r})=\mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{r})-j\omega\epsilon\vec{E}(\vec{r})=0$

$$I=\oint_{s_\Phi}\vec{H}\cdot d\vec{s}_\Phi=\int_0^{2\pi}\vec{1}_\Phi\frac{C/Z_0}{r\sin\Theta}e^{-jkr}\cdot\vec{1}_\Phi r\sin\Theta\, d\Phi=\frac{2\pi C}{Z_0}e^{-jkr}$$

$$Z_K=\frac{U}{I}=\frac{Z_0}{2\pi}\ln\left(\frac{\mathrm{tg}(\Theta_B/2)}{\mathrm{tg}(\Theta_A/2)}\right)\approx 60\,\Omega\ln\left(\frac{\mathrm{tg}(\Theta_B/2)}{\mathrm{tg}(\Theta_A/2)}\right)$$

$$U=\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{s}_\Theta=\int_{\Theta_A}^{\Theta_B}\vec{1}_\Theta\frac{C}{r\sin\Theta}e^{-jkr}\cdot\vec{1}_\Theta r\, d\Theta=C\,e^{-jkr}\int_{\Theta_A}^{\Theta_B}\frac{d\Theta}{\sin\Theta}=C\,e^{-jkr}\ln\left(\frac{\mathrm{tg}(\Theta_B/2)}{\mathrm{tg}(\Theta_A/2)}\right)$$

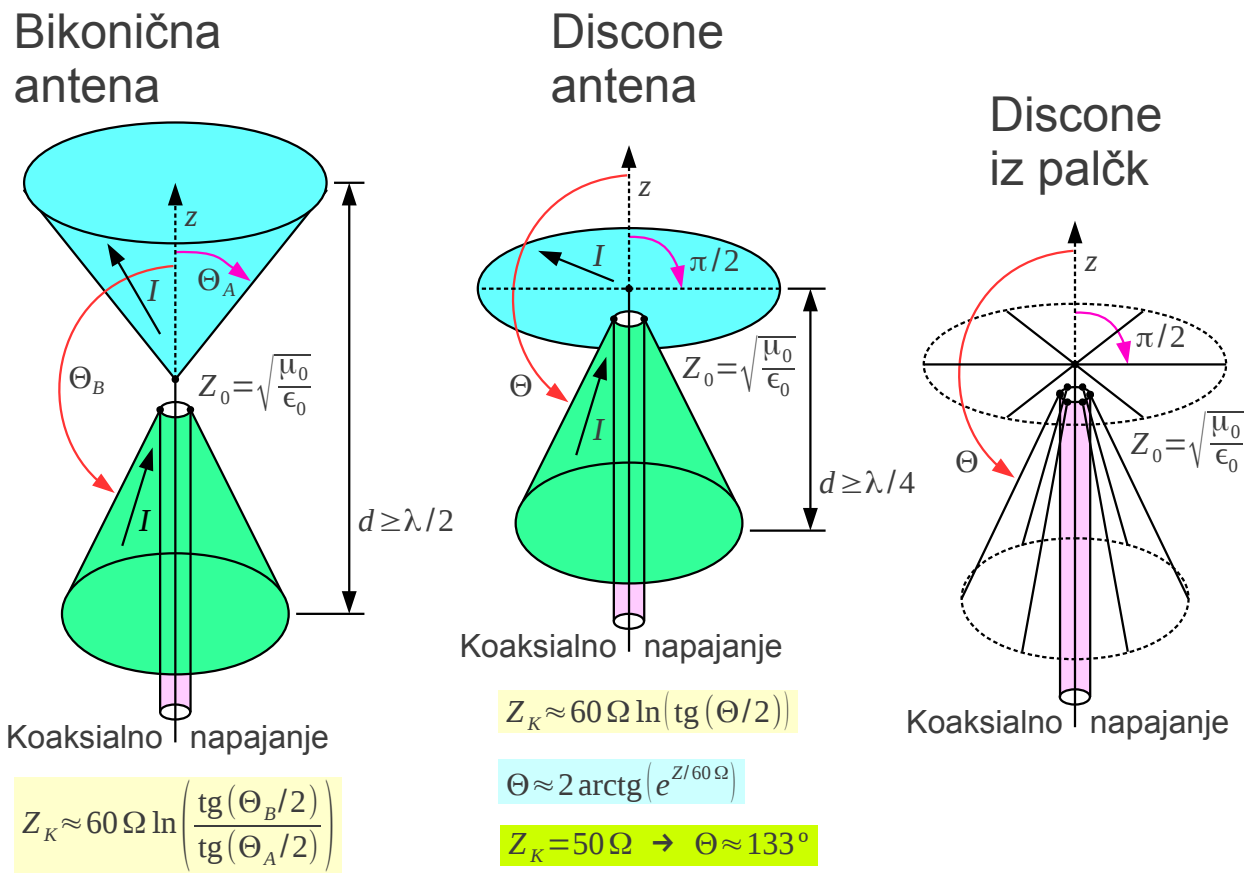
Točno elektromagnetno polje med dvema (neskončnima) kovinskima stožcema ima v elektrodinamiki preprosto analitsko rešitev. V krogelnih koordinatah (r,Θ,Φ) valovna enačba nima preprostega zapisa. Bolj enostavno je uganiti točno rešitev za električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ med stožcema in uporabiti Maxwellove enačbe.

Z Gaussovim zakonom preverimo odsotnost elektrin $\rho(\vec{r})=0$ v prostoru med stožcema. S Faradayevim zakonom izračunamo pripadajoče magnetno polje $\vec{H}(\vec{r})$. Končno z Ampèrejevim zakonom preverimo odsotnost tokov $\vec{J}(\vec{r})=0$ v prostoru med stožcema.

Tok I v stožcih izračunamo pri izbrani razdalji r tako, da zapišemo Ampèrejev zakon v integralni obliki tik nad kovinsko površino stožca, kjer ni tangencialnega električnega pretoka $D_r=D_\Phi=0$. Definicija napetosti U

med stožcema je smiselna pri izbrani razdalji r . Karakteristično impedanco stožčastega voda $Z_K = U/I$ določa razmerje med napetostjo in tokom.

Če sta oba stožca neskončno velika, je karakteristična impedanca Z_K kar impedanca, ki jo občuti izmenični vir v koordinatnem izhodišču. Impedanca opisane bikonične antene se bistveno ne spremeni, če sta plašča stožcev večja od nekaj valovnih dolžin, saj je takrat odboj na robovih plaščev zanemarljivo majhen. Bikonična antena je učinkovit sevalec, ko je antena $d \geq \lambda/2$ večja od polovice valovne dolžine:



Bikonično anteno običajno priključimo na izmenični vir preko koaksialnega kabla, ki ga napeljemo skozi spodnji stožec. Žilo kabla pri tem vežemo na gornji stožec, oklop pa na spodnji stožec. Isti koaksialni kabel lahko deluje tudi kot mehanski nosilec celotne antene.

Učinek odbojev na robovih plaščev končno velikih stožcev lahko še dodatno zmanjšamo tako, da uporabimo dva zelo različna stožca in se kazalčna vsota obeh odbojev zmanjša. Američan Armig G. Kandoian je leta 1943 izumil anteno discone (angleška zloženka »disc« in »cone«), kjer je plašč gornjega stožca kar ravna $\Theta_A = \pi/2$ krožna kovinska plošča (disk) premera okoli $2r \approx 0.175\,\lambda$ na spodnji frekvenčni meji. Discone je učinkovit

sevalec, ko je antena $d \geq \lambda/4$ večja od četrtine valovne dolžine.

Gornjo frekvenčno mejo bikonične antene oziroma discone določa predvsem natančnost prehoda koaksialnega kabla v stožca. Karakteristično impedanco stožčastega voda discone pogosto izberemo višjo od $Z_K = 50\,\Omega$ (kot $\Theta = 140^o ... 155^o$), da je antena bolje prilagojena na spodnji frekvenčni meji, ko vpliv odbojev na robovih ni zanemarljiv. Ker tečejo tokovi po plaščih stožcev bikonične antene oziroma discone samo v radialni smeri, lahko plašče stožcev oziroma disk nadomesti večje število (običajno 6 do 16) ravnih kovinskih palic.

TEM piramidni lijak, bikonična antena in discone vse izhajajo iz načela, da je učinkovit sevalec $d \gg \lambda$ dosti večji od valovne dolžine. Njihov sevalni izkoristek se tudi v praksi $\eta \approx 1$ približuje enoti. Impedanca v napajalni točki opisanih anten $Z \approx Z_K$ ustreza karakteristični impedanci praktično uporabnih napajalnih vodov.

Z opisom TEM lijakov in bikoničnih anten smo odgovorili na vprašanje, kako se izogniti neučinkovitosti Teslovega transformatorja. Učinkovito sevanje dosežemo z izmerami naprave $d \approx \lambda$, ki so vsaj primerljive z valovno dolžino.

Kaj več si v kratkem poglavju o preprostih antenah ne moremo privoščiti: kam seva antena, kakšna je polarizacija sevanja, kako doseči željene lastnosti antene z najmanjšimi možnimi izmerami in najnižjo porabo materiala?

Marsikateri strokovnjak za antene pri tem pogosto pozablja, da se sevanje lahko pojavi tudi takrat, ko si tega mogoče ne pričakujemo niti želimo. Ko postanejo prečne izmere kakršnegakoli električnega voda $d \approx \lambda$ primerljive z valovno dolžino, vod sam po sebi nujno še ne seva. Vsaka nezveznost voda: prekinitev voda (odprte sponke), skokovita sprememba prečnih izmer voda, vogal ali ostra krivina vedno povzroči odboj valovanja.

Pri prečnih izmerah $d \approx \lambda$ valovanje po preostalem preseku voda ne more pravočasno izvedeti, kaj se dogaja v določeni točki preseka voda. Brez podatka o spremembi voda se del valovanja ne odbije, pač pa nadaljuje svojo pot v isti smeri. Pri $d \approx \lambda$ oziroma $d > \lambda$ vsaka nezveznost voda torej seva!

* * * * *

13. Ravninski val

Lastnosti elektromagnetnega valovanja v praznem prostoru na velikih razdaljah $r \gg d$ od izmer antene so bile v grobem že opisane v poglavjih o sevanju in antenah. Na velikih razdaljah krogelne valovne fronte preidejo v vzporedne ravnine. Takšno valovanje imenujemo ravninski val (angleško: plane wave) oziroma žarek valovanja.

Ravninski val opisujejo valovne enačbe v prostoru brez izvorov, torej brez tokov $\vec{J}(\vec{r})=0$ in brez elektrin $\rho(\vec{r})=0$. V prostoru brez izvorov se lahko izognemo potencialom in neposredno rešujemo valovni enačbi za električno polje oziroma magnetno polje:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r})+\omega^2 \mu \epsilon \vec{E}(\vec{r})=0$$

$$\Delta \vec{H}(\vec{r})+\omega^2 \mu \epsilon \vec{H}(\vec{r})=0$$

Pri tem običajno zapišemo konstanto $\omega^2 \mu \epsilon = k^2$ z valovnim številom. Vektorski Laplace se da preprosto zapisati v kartezičnem koordinatnem sistemu (x, y, z) s skalarnimi Laplace pripadajočih komponent:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r})=\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{r})\right)-\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r})\right)$$

$$\Delta \vec{E}(x, y, z)=\vec{1}_x \Delta E_x+\vec{1}_y \Delta E_y+\vec{1}_z \Delta E_z$$

$$\Delta E_x=\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}$$

Vektorsko valovno enačbo za električno polje lahko tedaj zapišemo kot tri skalarne valovne enačbe za tri komponente vektorja električnega polja $\vec{E}(\vec{r})$:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}+k^2 E_x=0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}+k^2 E_y=0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}+k^2 E_z=0$$

Rešitev skalarne valovne enačbe iščemo v obliki produkta treh funkcij, kjer je vsaka funkcija ene same koordinate:

$$E_x(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\Delta E_x=YZ\frac{d^2 X}{d x^2}+XZ\frac{d^2 Y}{d y^2}+XY\frac{d^2 Z}{d z^2}$$

Skalarno valovno enačbo za komponento E_x lahko zapišemo v obliki, da je prvi člen samo funkcija koordinate x, drugi člen samo funkcija koordinate y, tretji člen samo funkcija koordinate z in zadnji člen od koordinat ni odvisen:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{d x^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2 Y(y)}{d y^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2 Z(z)}{d z^2}+k^2=0$$

Ker so koordinate (x,y,z) med sabo neodvisne, sklepamo, da je vsak člen zase konstanta:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{d x^2}=-k_x^2 \qquad \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2 Y(y)}{d y^2}=-k_y^2 \qquad \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2 Z(z)}{d z^2}=-k_z^2$$

Posamezne konstante med sabo povezuje enačba:

$$k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$$

Matematiki zapišejo rešitve gornjih enačb na različne načine. Pri tem ima vsaka rešitev fizikalni pomen, saj opisuje določen fizikalni pojav. V primeru $k_z^2>0$ lahko zapišemo rešitev za $Z(z)$ v naslednjih oblikah:

$$Z(z)=C_1\cos(k_z z)+C_2\sin(k_z z)=C_3 e^{+jk_z z}+C_4 e^{-jk_z z}$$

Trigonometrijski funkciji pri tem opisujeta fizikalni pojav stojnega vala. Eksponentni funkciji imaginarnega argumenta opisujeta dva potujoča ravninska valova. Skladno s poimenovanjem valov na eno-dimenzijskih prenosnih vodih imenujemo člen z $e^{+jk_z z}$ odbiti val, člen z $e^{-jk_z z}$ pa

napredujoči val.

Obe predstavljeni rešitvi sta enakovredni. Ravninski potujoči val je osnovni gradnik. Iz dveh ravninskih potujočih valov lahko sestavimo stojni val. Seveda gre tudi obratno, moramo le preračunati kompleksni konstanti (kazalca) C_1 in C_2 v pripadajoči kompleksni konstanti (kazalca) C_3 in C_4 ali obratno.

V primeru $k_z^2<0$ je $k_z=j|k_z|$ povsem imaginarna konstanta. Rešitev za $Z(z)$ lahko tedaj zapišemo v naslednjih oblikah:

$$Z(z)=C_5\,\mathrm{ch}(|k_z|z)+C_6\,\mathrm{sh}(|k_z|z)=C_7e^{+|k_z|z}+C_8e^{-|k_z|z}$$

Takšna rešitev za $Z(z)$ ne predstavlja več spreminjanja faze potujočega valovanja, pač pa eksponentno naraščanje $e^{+|k_z|z}$ oziroma usihanje $e^{-|k_z|z}$ amplitude. Eksponentno naraščanje oziroma usihanje opisuje različne fizikalne pojave, na primer elektromagnetno polje v redkejši snovi, ko pride na meji z gostejšo snovjo v slednji do popolnega odboja valovanja.

Osnovni gradnik rešitev valovne enačbe v prostoru brez izvorov je potujoči (napredujoči) ravninski val. Iz dveh ali več potujočih valov lahko sestavimo stojni val. Z uporabo kompleksnih konstant pridemo tudi do eksponentnega naraščanja oziroma usihanja.

Električno polje potujočega ravninskega vala ima v splošnem tri komponente E_x , E_y in E_z . Vsaka od komponent vsebuje tri funkcije pripadajočih treh koordinat. Skupno rešitev lahko zapišemo v obliki:

$$E_x(x,y,z)=E_{x0}e^{-jk_xx}e^{-jk_yy}e^{-jk_zz}$$

$$E_y(x,y,z)=E_{y0}e^{-jk_xx}e^{-jk_yy}e^{-jk_zz}$$

$$E_z(x,y,z)=E_{z0}e^{-jk_xx}e^{-jk_yy}e^{-jk_zz}$$

Če naj vse tri komponente električnega polja pripadajo istemu žarku, potem je smiselno, da izberemo iste k_x , k_y in k_z za vse tri komponente polja. Zapis rešitve si poenostavimo z uvedbo valovnega vektorja $\vec{k}$ za potujoči val:

$$\vec{k}=\vec{1}_x k_x+\vec{1}_y k_y+\vec{1}_z k_z=\vec{1}_k \omega\sqrt{\mu\epsilon}=\vec{1}_k k$$

$$\vec{E}(x,y,z)=\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Valovni vektor $\vec{k}$ kaže v smeri potovanja ravninskega vala, po velikosti pa je enak valovnemu številu k. Valovni vektor $\vec{k}$ je torej povsem smiselna nadgradnja pojma valovnega števila k v treh dimenzijah. Faza valovanja se spreminja najhitreje v smeri potovanja vala. Prečno na smer potovanja se faza prav nič ne spreminja, kar natančno opisuje skalarni produkt $\vec{k}\cdot\vec{r}$ v imaginarnem argumentu eksponentne funkcije. Vse konstante združimo v vektorsko konstanto $\vec{E}_0$, ki ustreza polju v koordinatnem izhodišču.

Maxwellove enačbe vsebujejo dve vektorski enačbi (Ampère in Faraday) ter eno skalarno enačbo (Gauss), skupaj torej sedem skalarnih enačb. Valovna enačba za električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ je ena sama vektorska enačba, torej tri skalarne enačbe. Če tri skalarne Maxwellove enačbe uporabimo zato, da izločimo vektor magnetne poljske jakosti $\vec{H}(\vec{r})$, ostanejo še vedno štiri neodvisne skalarne enačbe, kar je ena enačba več od valovne enačbe za $\vec{E}(\vec{r})$!

Maxwellove enačbe torej vsebujejo strožje zahteve od valovne enačbe. Dobljeno rešitev za $\vec{E}(\vec{r})$ iz valovne enačbe moramo torej vedno preveriti z Maxwellovimi enačbami, da izločimo nefizikalne rešitve. Bolj točno, preveriti moramo odsotnost elektrin $\rho(\vec{r})=0$ z Gaussovim zakonom. Na srečo se operator odvajanja ∇, simbolični vektor »Nabla« za ravninski potujoči val v kartezičnih koordinatah (x,y,z), poenostavi v:

$$\nabla=-j\vec{k}$$

$$\mathrm{div}(\epsilon\vec{E})=\epsilon\left[\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right]=-j\epsilon(k_x E_x+k_y E_y+k_z E_z)=-j\epsilon\vec{k}\cdot\vec{E}=0$$

Gaussov zakon preprosto zahteva, da je električno polje $\vec{E}(\vec{r})\perp\vec{k}$ vedno pravokotno na valovni vektor, to je smer potovanja valovanja. Električno polje ravninskega vala torej ne sme imeti vzdolžne komponente. Pripadajočo magnetno poljsko jakost $\vec{H}(\vec{r})$ dobimo preko Faradayevega zakona z izračunom vrtinčenja:

$$\vec{H}(\vec{r})=\frac{j}{\omega\mu}\operatorname{rot}\vec{E}=\frac{j}{\omega\mu}\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}=\frac{j}{\omega\mu}(-j\vec{k}\times\vec{E})=\frac{\vec{k}\times\vec{E}}{\omega\mu}=\frac{\vec{1}_k\times\vec{E}}{Z}$$

Magnetno polje potujočega ravninskega vala je pravokotno $\vec{H}(\vec{r})\perp\vec{k}$ na valovni vektor kot rezultat vektorskega produkta. Električna in magnetna poljska jakost sta pravokotni med sabo $\vec{E}(\vec{r})\perp\vec{H}(\vec{r})$ in sta v točnem razmerju $|\vec{E}|=Z|\vec{H}|$ valovne impedance $Z=\sqrt{\mu/\epsilon}$. Magnetno polje potujočega ravninskega vala je sofazno z električnim poljem, kar daje povsem delovno moč, torej povsem realni Poyntingov vektor v smeri valovnega vektorja:

$$\vec{S}(\vec{r})=\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*=\frac{1}{2}\vec{E}\times\left(\frac{\vec{1}_k\times\vec{E}^*}{Z}\right)=\vec{1}_k\frac{|\vec{E}|^2}{2Z}=\vec{1}_k\frac{|\vec{H}|^2 Z}{2}$$

Ravninski val v povsem praznem prostoru (μ_0,ϵ_0) je eden osnovnih fizikalnih pojavov, na katerega so vezane tudi merske enote sistema MKSA (Meter-Kilogram-Sekunda-Ampère). Meter je definiran z izbiro hitrosti žarka svetlobe oziroma elektromagnetnega ravninskega vala v povsem praznem prostoru (μ_0,ϵ_0) :

$$c_0=\frac{\omega}{k_0}=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}=299792458\,\mathrm{m/s}\approx 3\cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

Sekunda je definirana z izbiro frekvence cezijeve $(^{133}\mathrm{Cs})$ atomske ure $f=9192631770\,\mathrm{Hz}$ v področju mikrovalov. Kilogram je bil dolgo časa od vseh osnovnih merskih enot najslabše definiran, ker je bil vezan na skrbno izbrano utež z relativno ponovljivostjo meritev v velikostnem razredu 10^{-8} . Sodobna definicija kilograma (2019) je izbira Planckove konstante $h=6.62607015\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}=6.62607015\cdot 10^{-34}\,\mathrm{kg\cdot m^2/s}$.

Električna merska enota Ampère je bila dolgo časa vezana na vse tri predhodne merske enote: meter, (nerodno definirani) kilogram in sekundo, z izbiro permeabilnosti praznega prostora:

$$\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$$

Sodobna definicija Ampère (2019) je izbira naboja elektrona $Q_e = -1.602176634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}$. Prej opisana izbira permeabilnosti praznega prostora je samo še dober približek, saj je točna vrednost vezana na izbire drugih veličin. Iz hitrosti svetlobe v praznem prostoru in permeabilnosti praznega prostora preprosto izračunamo dielektričnost praznega prostora:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c_0^2 \mu_0} \approx 8.8541878176 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \approx \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$$

Hitrost svetlobe v praznem prostoru in permeabilnost praznega prostora določata tudi valovno impedanco praznega prostora:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = c_0 \mu_0 \approx 376.730313\,\Omega \approx 377\,\Omega \approx 120\,\pi\,\Omega$$

Brezizgubna snov lahko ima permeabilnost μ oziroma dielektričnost ϵ različni od praznega prostora (μ_0, ϵ_0) :

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad \text{in} \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

Brezizgubno snov največkrat opisujeta relativna permeabilnost $\mu_r \geq 1$ in relativna dielektričnost $\epsilon_r \geq 1$. Hitrost ravninskega elektromagnetnega vala v takšni snovi znaša:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c_0}{n} \leq c_0$$

Hitrost ravninskega vala se v snovi zmanjša za faktor $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \geq 1$, ki ga imenujemo lomni količnik snovi. Z lomnim količnikom izrazimo tudi valovno število v snovi in valovno dolžino v snovi:

$$k = n k_0 = n \frac{\omega}{c_0} = \frac{\omega}{v} \geq k_0 \quad \text{in} \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{v}{f} = \frac{c_0}{n f} \leq \lambda_0$$

Brezizgubna snov ima tudi drugačno valovno impedanco Z od praznega prostora, ki je na splošno ne moremo izraziti z lomnim količnikom n iste snovi:

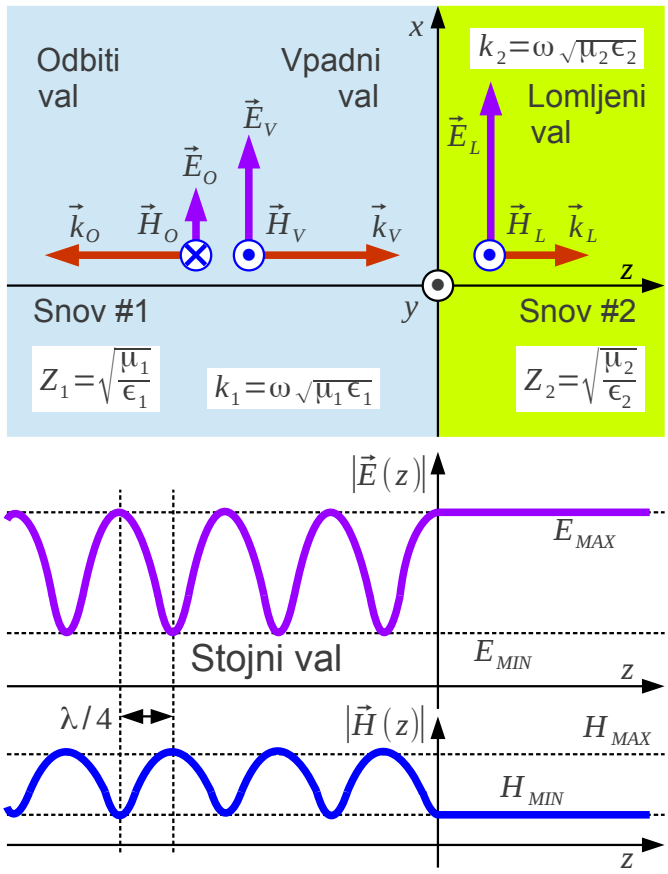
$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$$

Lomni količnik n in valovna impedanca Z sta dve med sabo neodvisni veličini, ki popolnoma opisujeta elektromagnetne lastnosti brezizgubne snovi na povsem enakovreden način kot relativna permeabilnost μ_r in relativna dielektričnost ϵ_r .

Pogosto imamo opraviti s snovmi, ki niso feromagnetiki $\mu_r=1$ in imajo le relativno dielektričnost $\epsilon_r \neq 1$ različno od praznega prostora. Izraza za lomni količnik in valovno impedanco se tedaj poenostavita v:

$$n=\sqrt{\epsilon_r} \quad \text{in} \quad Z=\frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon_r}}=\frac{Z_0}{n}$$

Ravninski val nam kot gradnik omogoča rešiti marsikatero nalogo. Kaj se zgodi, ko žarek vpada iz prve brezizgubne snovi (μ_1,ϵ_1) pod pravim kotom na drugo brezizigubno snov (μ_2,ϵ_2) ? Nalogo rešijo trije ravninski valovi: vpadni val in odbiti val v prvi snovi ter lomljeni val v drugi snovi:



Odboj na meji snovi

Vpad $\vec{k}_V=\vec{1}_z k_1$

$$\vec{E}_V(z)=\vec{1}_x E_V e^{-jk_1 z}$$

$$\vec{H}_V(z)=\vec{1}_y \frac{E_V}{Z_1} e^{-jk_1 z}$$

Lom $\vec{k}_L=\vec{1}_z k_2$

$$\vec{E}_L(z)=\vec{1}_x E_L e^{-jk_2 z}$$

$$\vec{H}_L(z)=\vec{1}_y \frac{E_L}{Z_2} e^{-jk_2 z}$$

Odboj $\vec{k}_O=-\vec{1}_z k_1$

$$\vec{E}_O(z)=\vec{1}_x E_O e^{jk_1 z}$$

$$\vec{H}_O(z)=-\vec{1}_y \frac{E_O}{Z_1} e^{jk_1 z}$$

Prestop $\vec{E}_t(z=0)$: $\quad E_V+E_O=E_L$

Prestop $\vec{H}_t(z=0)$: $\quad \frac{E_V}{Z_1}-\frac{E_O}{Z_1}=\frac{E_L}{Z_2}$

$$\frac{E_V-E_O}{Z_1}=\frac{E_V+E_O}{Z_2}$$

$$E_V(Z_2-Z_1)=E_O(Z_2+Z_1)$$

Odbojnost $\quad \Gamma=\frac{E_O}{E_V}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}$

Pri pravokotnem vpadu v smeri $\vec{1}_z$ na mejo snovi so tako električna polja kot magnetna polja vseh treh ravninskih valov vzporedna z mejo snovi v ravnini xy . Ker na meji snovi ni virov polja, morajo biti tangencialne

komponente električne poljske jakosti $\vec{E}_t$ in magnetne poljske jakosti $\vec{H}_t$ na obeh straneh meje pri $z=0$ enake.

Uveljavitev prestopnih pogojev pokaže na povezavo med vpadnim, odbitim in lomljenim valom, ki jo določata valovni impedanci obeh snovi $Z_1=\sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$ in $Z_2=\sqrt{\mu_2/\epsilon_2}$. V primeru ravninskih valov definiramo odbojnost $\Gamma=E_O/E_V$ kot razmerje kazalcev električne poljske jakosti odbitega in vpadnega vala. Opisani izraz za odbojnost je povsem skladen z izrazom, ki smo ga dobili za eno-dimenzijski vod z $Z_K=Z_1$,ki je priključen na breme $Z=Z_2$.

Odbojnost pogosto računamo na meji brezizgubnih snovi (dielektrikov), ki niso feromagnetiki $\mu_1=\mu_2=\mu_0$ oziroma $\mu_{r1}=\mu_{r2}=1$ in se med sabo razlikujejo le v dielektričnosti $\epsilon_1\neq\epsilon_2$. V tem primeru lahko odbojnost Γ računamo še na številne druge načine, iz relativnih dielektričnosti, iz lomnih količnikov oziroma iz valovnih števil v obeh snoveh:

$$\Gamma=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}=\frac{\sqrt{\epsilon_1}-\sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1}+\sqrt{\epsilon_2}}=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}$$

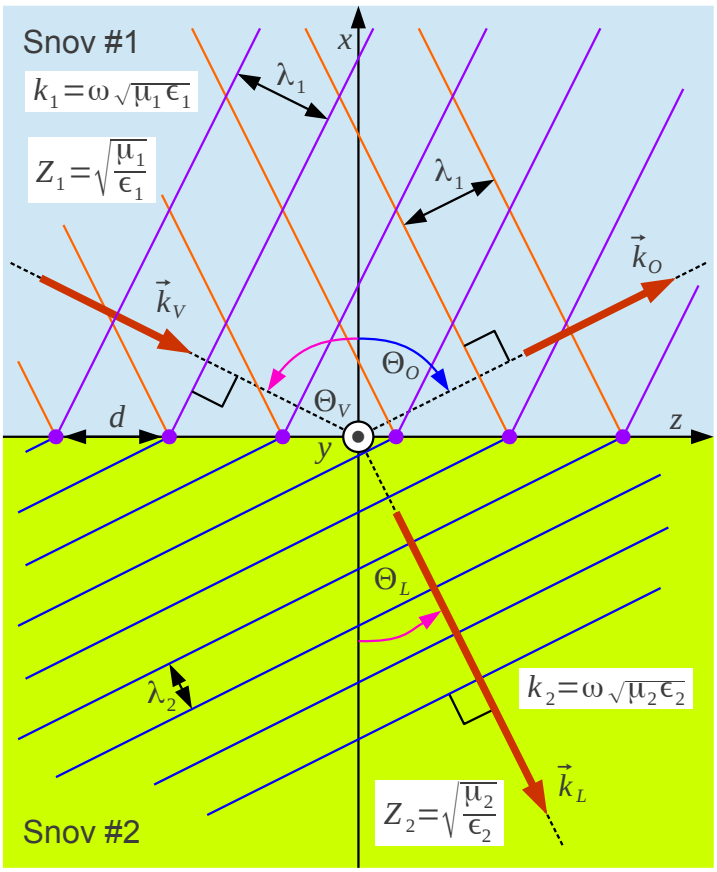
Odbiti val in vpadni val tvorita v prvi snovi stojni val. Maksimumi električne poljske jakosti stojnega vala sovpadajo z minimumi magnetne poljske jakosti in obratno. Faza odbojnosti se suče z dvakratno vrednostjo fazne konstante $\Gamma(z)=\Gamma(0)e^{2\beta z}=\Gamma(0)e^{2k_1 z}$, ki je v opisanem primeru kar enaka valovnemu številu v prvi snovi $\beta=k_1$, kjer je $z<0$ negativen!

Na sliki je narisan primer, ko valovanje vpada na mejo z višjo valovno impedanco $Z_2>Z_1$ (redkejša snov) in takrat je odbojnost na meji dveh brezizgubnih snovi pozitivno realno število $\Gamma(z=0)>0$. Ko valovanje vpada na snov z nižjo valovno impedanco $Z_2<Z_1$ (gostejša snov), je odbojnost negativna $\Gamma(z=0)<0$. Neskončno prevodno kovino opisuje $Z_2=0$, površina dobro prevodne kovine zato dosega odbojnost skoraj $\Gamma=-1$.

Valovanje v drugi snovi posplošeno imenujemo lomljeni žarek, čeprav pri pravokotnem vpadu sploh ne pride do loma valovanja. Pri pravokotnem vpadu sta pomembni edino valovni impedanci obeh snovi Z_1 in Z_2 , saj valovni vektorji vseh treh valov kažejo v isto oziroma nasprotno smer. Lomljeni žarek predstavlja napredujoči val v drugi snovi. Ker odbitega vala v drugi snovi ni, tam ni stojnega vala in je amplituda napredujočega vala

konstantna.

Pomen valovnih vektorjev opazimo šele pri poševnem vpadu žarka na mejo dveh snovi, ko so smeri valovnih vektorjev vseh treh žarkov $\vec{k}_V$, $\vec{k}_O$ in $\vec{k}_L$ različne med sabo. Če naj bo fizikalni pojav enak vzdolž celotne osi z , ki razmejuje različni snovi, potem morajo biti pripadajoče komponente vseh treh valovnih vektorjev $k_{Vz}=k_{Oz}=k_{Lz}=\beta$ med sabo enake:



Lom na meji snovi

$$\vec{k}_V=\vec{1}_V k_1=\vec{1}_x k_{Vx}+\vec{1}_z\beta$$

$$\vec{k}_O=\vec{1}_O k_1=\vec{1}_x k_{Ox}+\vec{1}_z\beta$$

$$\vec{k}_L=\vec{1}_L k_2=\vec{1}_x k_{Lx}+\vec{1}_z\beta$$

$$k_1=n_1 k_0=k_0\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}$$

$$k_2=n_2 k_0=k_0\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}$$

$$\beta=k_1\sin\Theta_V=k_1\sin\Theta_O=k_2\sin\Theta_L$$

$$\lambda_1=\frac{\lambda_0}{n_1}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}} \qquad \lambda_2=\frac{\lambda_0}{n_2}=\frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}}$$

$$d=\frac{\lambda_1}{\sin\Theta_V}=\frac{\lambda_1}{\sin\Theta_O}=\frac{\lambda_2}{\sin\Theta_L}$$

Odbojni zakon $\Theta_O=\Theta_V$

Snellov lomni zakon

$$n_1\sin\Theta_V=n_2\sin\Theta_L$$

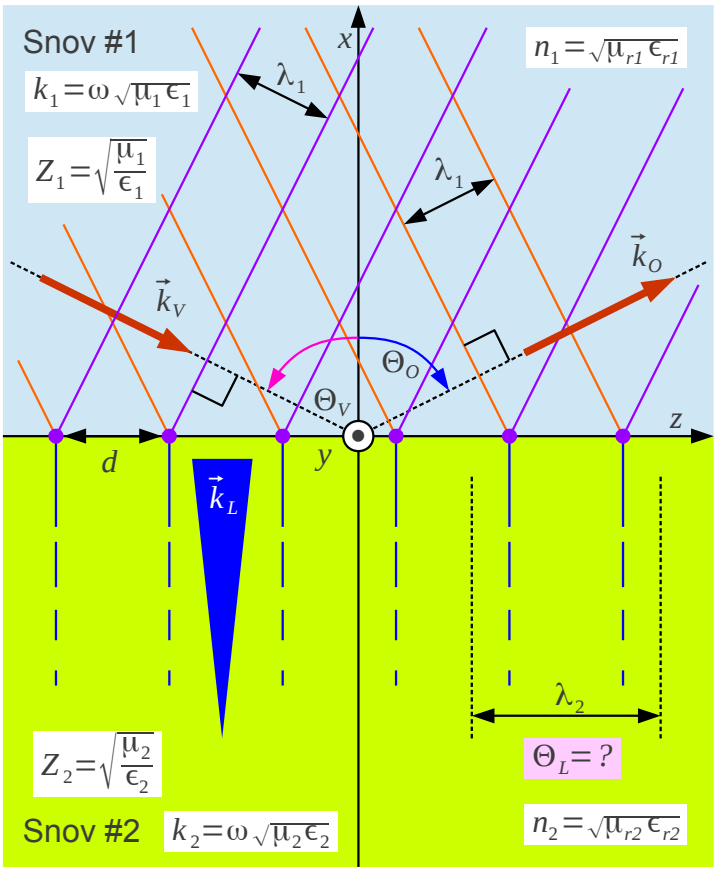
Razlaga s komponentami z valovnih vektorjev je povsem enakovredna razlagi z valovnimi frontami vseh treh žarkov. Valovne fronte so pravokotne na smer žarka. Vzdolž celotne mejne ploskve, torej vzdolž osi z morajo valovne fronte ohranjati isto medsebojno fazo. Na gornji sliki so iz preprostosti narisane sofazne! Projekcija valovne dolžine kateregakoli žarka mora biti enaka d !

Komponente z valovnih vektorjev oziroma projekcije valovnih dolžin žarkov privedejo do odbojnega zakona $\Theta_O=\Theta_V$ ter do Snellovega lomnega zakona $n_1\sin\Theta_V=n_2\sin\Theta_L$. Slednji je poimenovan po danskem astronomu, ki je zakonitosti loma svetlobe ponovno odkril več kot šest stoletij za perzijskim znanstvenikom iz Bagdada: Ibn Sahl je povsem pravilen lomni zakon objavil že leta 984! Smer lomljenega žarka Θ_L torej določata lomna

količnika n_1 in n_2 , valovni števili k_1 in k_2 oziroma valovni dolžini λ_1 in λ_2 .

Valovni impedanci Z_1 in Z_2 ne nastopata v izračunu smeri lomljenega žarka, pač pa povsem jasno tudi pri poševnem vpadu nastopata v izrazu za odbojnost Γ . Slednja je povrhu odvisna od polarizacije elektromagnetnega valovanja. Uveljavitev prestopnih pogojev na meji dveh snovi daje pri poševnem vpadu dve različni Fresnelovi odbojnosti za polarizacijo TE, ko velja $\vec{E}\perp\vec{1}_z$ in tej pravokotno polarizacijo TM, ko velja $\vec{H}\perp\vec{1}_z$. Fresnelove odbojnosti dobimo največkrat zapisane samo z lomnima količnikoma n_1 in n_2 brez valovnih impedanc, kar jasno velja samo za dielektrike, ki niso feromagnetiki $\mu_1=\mu_2=\mu_0$!

V primeru prestopa v redkejšo snov $n_2<n_1$ se pri dovolj položnem vpadu oziroma dovolj velikem $\sin\Theta_V$ lahko zgodi, da smeri lomljenega žarka $\Theta_L=?$ ne moremo določiti. Poskus pokaže, da se vpadni žarek tedaj popolnoma odbije:



Popolni odboj

Primer $n_2<n_1$ *velik* $\sin\Theta_V$ $\lambda_2>d>\lambda_1$

$$\sin\Theta_L=\frac{n_1}{n_2}\sin\Theta_V>1$$

Lomljeni žarek ne obstaja?

$$k_{Vx}^2+\beta^2=k_{Ox}^2+\beta^2=k_1^2=n_1^2k_0^2$$

$$k_{Lx}^2+\beta^2=k_2^2=n_2^2k_0^2$$

$$k_{Lx}^2=n_2^2k_0^2-\beta^2=(n_2^2-n_1^2\sin^2\Theta_V)k_0^2<0$$

$$k_{Lx}=j|k_{Lx}| \qquad \vec{E}_L(\vec{r})=\vec{E}_L(0)e^{-j\vec{k}_L\cdot\vec{r}}$$

$$\vec{k}_L=\vec{1}_x(j|k_{Lx}|)+\vec{1}_z\beta$$

Usihanje v smeri -x

$$\vec{E}_L(\vec{r})=\vec{E}_L(0)e^{|k_{Lx}|x}\,e^{-j\beta z}$$

Faza v smeri z

Valovna dolžina v drugi snovi $\lambda_2>d$ je tedaj večja od zahtevane projekcije. Kaj dosti več s preprostim sklepanjem ne moremo ugotoviti. Lahko

pa izračunamo valovni vektor $\vec{k}_L$ iskanega lomljenega žarka. Račun pokaže, da je komponenta k_{Lx} čisto imaginarna, valovni vektor $\vec{k}_L$ v redkejši snovi pa kompleksen.

Kljub popolnemu odboju elektromagnetno polje sega tudi v redkejšo snov. Faza valovanja v redkejši snovi se spreminja samo v smeri osi z, zato so valovne fronte pravokotne na mejo snovi. Jakost elektromagnetnega polja eksponentno usiha z oddaljevanjem od meje snovi v smeri $-x$, pripadajoča komponenta S_x Poyntingovega vektorja je povsem jalova. Torej lomljeni val ni več ravninski val. Še vedno pa potuje vzporedno z mejo snovi in nosi del energije.

Eksponentno usihanje valovanja v redkejši snovi opišemo z vdorno globino δ, to se pravi razdaljo, na kateri elektromagnetno polje upade za faktor $1/e$. Vdorna globina δ je običajno podobnega velikostnega razreda kot valovna dolžina λ_0 v praznem prostoru:

$$\delta=\frac{1}{|k_{Lx}|}=\frac{1}{\sqrt{\beta^2-n_2^2k_0^2}}=\frac{1}{k_0\sqrt{n_1^2\sin^2\Theta_V-n_2^2}}=\frac{\lambda_0}{2\pi\sqrt{n_1^2\sin^2\Theta_V-n_2^2}}$$

Pojem popolnega odboja je zavajajoč, ker zahteva neskončno debelo $h\rightarrow\infty$ redkejšo snov n_2, da elektromagnetno polje v njej popolnoma usahne. Če je redkejša snov n_2 le končne debeline $h\approx\delta$ in ji ponovno sledi gostejša snov n_3, pride na novi meji snovi do ponovnega odboja in loma. Pojav imenujemo tuneliranje valovanja skozi redkejšo snov.

Elektromagnetno nalogo tuneliranja opisuje pet ravninskih valov, ki jih ponazarja pet valovnih vektorjev. Valovanje v izvorni gostejši snovi n_1 opisujeta vpadni žarek $\vec{k}_V$ in odbiti žarek $\vec{k}_O$. Valovanje v plasti redkejše snovi n_2 končne debeline $h\approx\delta$ se pojavita dva eksponentno usihajoča valova v nasprotnih smereh $\vec{k}_{T+}$ in $\vec{k}_{T-}$. Končno se v gostejši snovi n_3 pojavi še lomljeni žarek $\vec{k}_L$:

Vpad

$$k_{Vx}=-k_{1x}=-\sqrt{n_1^2k_0^2-\beta^2}$$

Odboj

$$k_{Ox}=+k_{1x}=\sqrt{n_1^2k_0^2-\beta^2}$$

$$\vec{E}_1(\vec{r})=\vec{E}_V(0)e^{+jk_{1x}x}e^{-j\beta z}+$$
$$+\vec{E}_O(0)e^{-jk_{1x}x}e^{-j\beta z}$$

$$n_2<n_1<n_3$$
$$\lambda_2>d>\lambda_1>\lambda_3$$
$$\sin\Theta_T>1$$

Tuneliranje

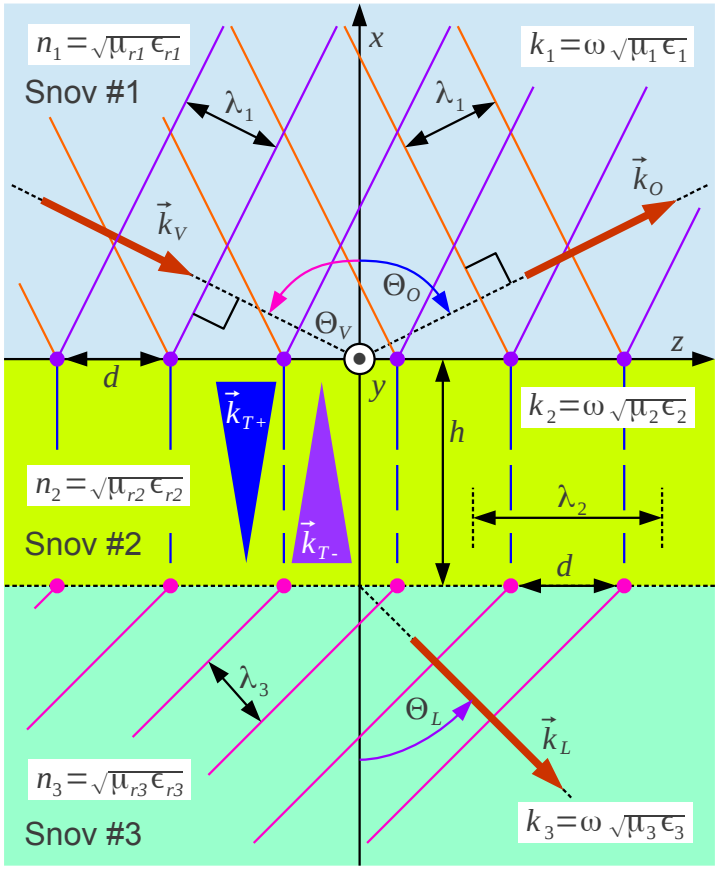
$$\pm|k_{Tx}|=\pm\sqrt{\beta^2-n_2^2k_0^2}$$

$$\vec{E}_2(\vec{r})=\vec{E}_{T+}(0)e^{+|k_{Tx}|x}e^{-j\beta z}+$$
$$+\vec{E}_{T-}(0)e^{-|k_{Tx}|x}e^{-j\beta z}$$

Lom

$$k_{Lx}=-k_{3x}=-\sqrt{n_3^2k_0^2-\beta^2}$$

$$\vec{E}_3(\vec{r})=\vec{E}_L(0)e^{+jk_{3x}x}e^{-j\beta z}$$



Tuneliranje

Pojav na meji snovi n_1/n_2 proži eksponentno usihajoč val $\vec{E}_{T+}$ v smeri $-x$ v redkejši snovi n_2. Pojav na meji snovi n_2/n_3 proži eksponentno usihajoč val $\vec{E}_{T-}$ v smeri $+x$ v redkejši snovi n_2. Kazalca obeh eksponentno usihajočih valov sta med sabo premaknjena za četrt periode.

Zaradi kvadrature oba eksponentno usihajoča valova dajeta skupaj dodatno realno komponento S_{2x} Poyntingovega vektorja, ki ponazarja prenos delovne moči skozi plast redkejše snovi n_2. V spodnji gostejši snovi n_3 se tuneliranje pretvori v lomljeni žarek, to je potujoči ravninski val s povsem delovnim Poyntingovim vektorjem. Jakost tuneliranja upada eksponentno z debelino h sloja redkejše snovi n_2 in lahko postane v praksi zanemarljivo majhna.

* * * * *

14. Votlinski rezonator

Potujoči ravninski val opisuje pojav v neomejenem prostoru. Smer žarka svetlobe lahko tem natančneje določimo, čim večja je širina žarka $w \gg \lambda$ v primerjavi z valovno dolžino. Iz dveh ali več potujočih valov sestavimo stojni val, ki načeloma prav tako opisuje pojav v neomejenem prostoru.

Ravninske valove, gradnike stojnega vala lahko izberemo tako, da stojni val ne prenaša delovne moči. Tedaj je Poyntingov vektor $\vec{S}$ v eni, dveh ali vseh treh dimenzijah prostora povsem jalov oziroma enak nič. V koordinatnih smereh, v katerih je Poyntingov vektor $\vec{S}$ povsem jalov, lahko stojni val prostorsko omejimo. Na primer okovinimo ploskve, kjer je tangencialna električna poljska jakost $\vec{E}_t = 0$ enaka nič.

Napravo, ki zadržuje dinamično $\omega \neq 0$ elektromagnetno polje v omejenem prostoru, imenujemo votlinski rezonator. Votlinski rezonatorji so pomembni gradniki številnih naprav. Preprost eno-dimenzijski votlinski rezonator sta razvila Charles Fabry in Jean-Baptiste Alfred Perot leta 1899 za merjenje lastnosti spektra svetlobe.

Eno-dimenzijski stojni val sestavimo iz dveh enako močnih ravninskih valov $\vec{E}_V(z)$ in $\vec{E}_O(z)$, ki potujeta v nasprotnih smereh v osi z. Pripadajoče magnetno polje $\vec{H}(z)$ je v kvadraturi z električnim poljem $\vec{E}(z)$. Hrbti stojnega vala električnega polja ustrezajo vozlom magnetnega polja in obratno. Vozle električnega polja $\vec{E}(z) = 0$ okovinimo, torej tja postavimo dve kovinski zrcali $\Gamma = -1$. S tem ustvarimo tako imenovan Fabry-Perotov rezonator, ki predstavlja primer votlinskega rezonatorja.

Pri izbrani razdalji d lahko med vzporednima zrcaloma obstaja elektromagnetno polje samo določenih frekvenc. Pripadajoči rod opišemo z oznako $\mathrm{TEM}_{00\mathrm{m}}$: električno polje $\vec{E} \perp \vec{1}_z$ in magnetno polje $\vec{H} \perp \vec{1}_z$ sta pravokotna na os z. Trije indeksi pomenijo nič sprememb v osi x, nič sprememb v osi y in m hrbtov električnega polja v osi z. Pri tem je $m = 1,2,3,4,5,6...$ poljubno naravno število:

Fabry-Perot

Vpad $\vec{k}_V = \vec{1}_z k$

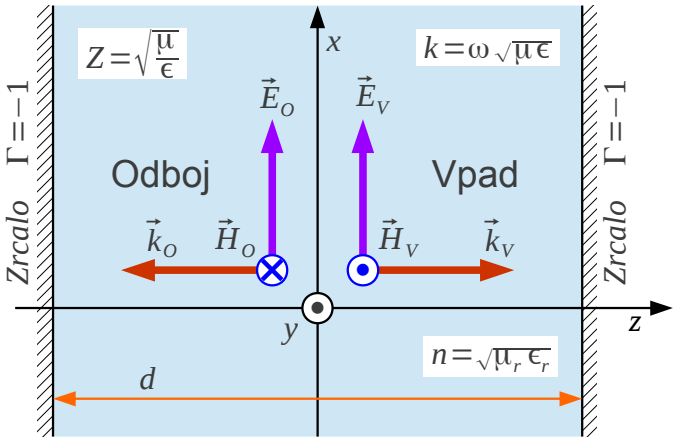
$$\vec{E}_V(z) = \vec{1}_x \frac{C}{2} e^{-jkz}$$

$$\vec{H}_V(z) = \vec{1}_y \frac{C}{2Z} e^{-jkz}$$

Odboj $\vec{k}_O = -\vec{1}_z k$

$$\vec{E}_O(z) = \vec{1}_x \frac{C}{2} e^{jkz}$$

$$\vec{H}_O(z) = -\vec{1}_y \frac{C}{2Z} e^{jkz}$$



$$\vec{E}(z) = \vec{E}_V(z) + \vec{E}_O(z) = \vec{1}_x \frac{C}{2} e^{-jkz} + \vec{1}_x \frac{C}{2} e^{jkz}$$

$$\vec{E}(z) = \vec{1}_x C \cos(kz)$$

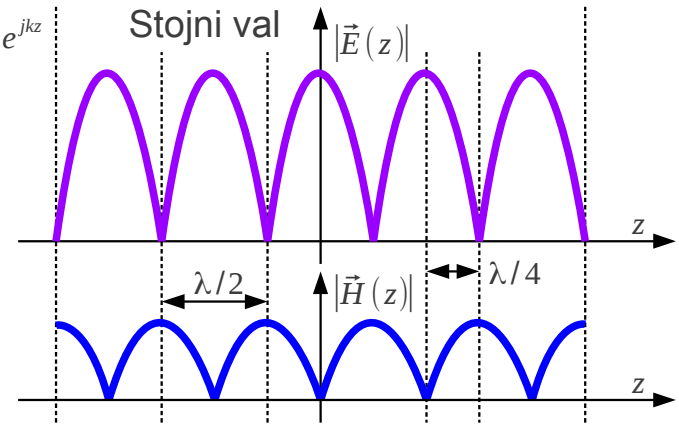
$$\vec{H}(z) = \vec{H}_V(z) + \vec{H}_O(z) = \vec{1}_y \frac{C}{2Z} e^{-jkz} - \vec{1}_y \frac{C}{2Z} e^{jkz}$$

$$\vec{H}(z) = -\vec{1}_y \frac{jC}{Z} \sin(kz)$$

$$\vec{S}(z) = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \vec{1}_z \frac{j|C|^2}{2Z} \cos(kz) \sin(kz)$$

$kd = m\pi$ $\quad \mathrm{TEM}_{00m}$ $\quad m = 1,2,3,4,5,6\ldots$

$$f_{00m} = k_{00m} \frac{v}{2\pi} = m \frac{c_0}{2d\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = m \frac{c_0}{2nd}$$



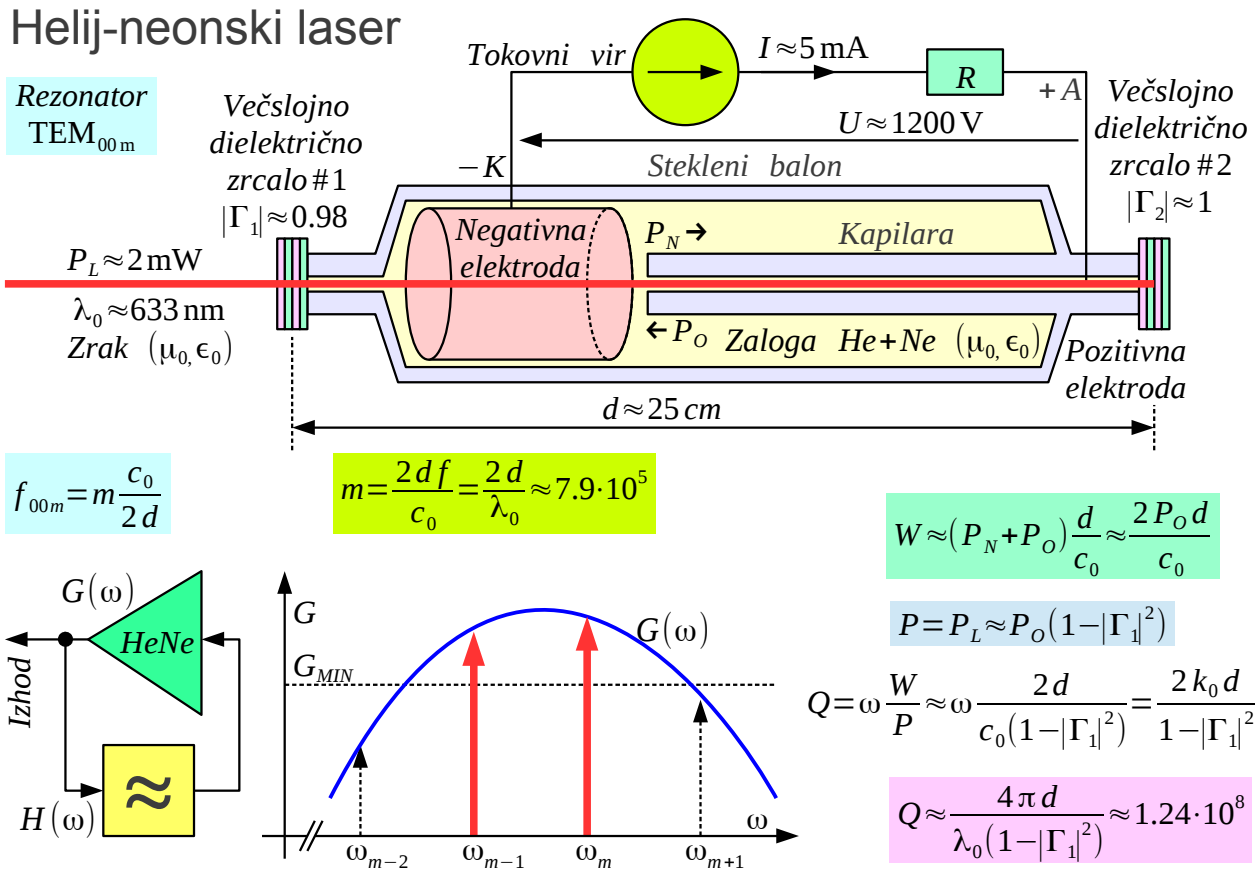
Fabry-Perotov rezonator uporabimo v povratni vezavi plinskega laserja. V primeru HeNe laserja zbujeni atomi plina neona sevajo v vseh smereh na številnih spektralnih črtah vključno z močno rdečo črto pri valovni dolžini $\lambda_0 \approx 633\,\mathrm{nm}$, kar ustreza osrednji frekvenci $f_0 \approx 474\,\mathrm{THz}$. Spektralno širino črte okoli $\Delta f_{Ne} \approx 1.5\,\mathrm{GHz}$ določa Dopplerjev pomik zaradi toplotnega gibanja atomov žlahtnega plina neona.

Laserska cev je napolnjena z zmesjo 80% helija in 20% neona pod razmeroma nizkim tlakom, ki se obnaša skoraj kot prazen prostor (μ_0, ϵ_0) za elektromagnetno valovanje. Dodatek helija omogoča učinkovitejše črpanje atomov neona na željeno energijsko raven preko električnega preboja. Cev vžge pri $U_v \approx 7\,\mathrm{kV}$ in gori pri $U \approx 1200\,\mathrm{V}$, zato jo napajamo s tokovnim virom $I \approx 5\,\mathrm{mA}$. Dodatni zaporedni upor R preprečuje nestabilnost preboja v cevi zaradi notranje kapacitivnosti tokovnega vira oziroma visokonapetostnih priključnih vodov.

Katodni padec v plinski cevi močno segreva negativno elektrodo. Zato je slednja velika, da se ne pregreje in ne pokvari plinske zmesi v cevi. Ker se spodnja energijska raven atomov neona prazni preko trkov ob steno posode, dobimo večino laserskega ojačanja v notranjosti ozke steklene kapilare. Kljub kapilari je ojačanje razredčenega vzbujenega neona majhno, v velikostnem

razredu komaj $G/l \approx 1\,\mathrm{dB/m}$ pri osrednji frekvenci $f_0 \approx 474\,\mathrm{THz}$.

Povratna vezava s Fabry-Perotovim rezonatorjem določa tako prostorske lastnosti (prečna koherenca) kot spektralne lastnosti (vzdolžna koherenca) svetlobe helij-neonskega laserja. Izbrana povratna vezava določa nihanje samo v smeri osi laserja in to samo na frekvencah rodov rezonatorja $H(\omega)$:



Razdalja med zrcali na konceh laserske cevi mora biti zadosti velika $d \approx 25\,\mathrm{cm}$, da je frekvenčna razdalja med rodovi $\Delta f_{FP} \approx 600\,\mathrm{MHz}$ manjša od pasovne širine $\Delta f_{Ne} \approx 1.5\,\mathrm{GHz}$ ojačanja neona $G(\omega)$. Tedaj laserska cev niha vsaj na enem rodu, običajno na dveh ali več rodovih. Slika prikazuje močno nihanje cevi na rodu m in nekoliko šibkejše nihanje na rodu $m-1$. Ojačanje neona $G(\omega)$ je premajhno, da bi cev nihala na rodovih $m-2$ oziroma $m+1$.

Razdalja med zrcali laserske cevi $d \gg \lambda_0$ je zelo velika v primerjavi z valovno dolžino svetlobe. Rodovno število rezonatorja $m \approx 7.9 \cdot 10^5$ je zelo veliko. Kvaliteto rezonatorja $Q = \omega W/P$ določimo iz razmerja med vskladiščeno energijo in močjo izgub. Energijo dobimo iz vsote napredujočega in odbitega vala, moč izgub pa iz odbojnosti Γ_1

polprepustnega zrcala na izhodu laserja. Izredno visoka kvaliteta rezonatorja $Q \approx 1.24 \cdot 10^8$ omogoča izredno ozke spektralne črte nihanja laserja, več kot tisočkrat ožje od širine črte plina neona.

Odbojnost kovinskih zrcal običajno ne preseže vrednosti $|\Gamma| < 0.9$ za vidno svetlobo, kar je za delovanje plinskega laserja z majhnim ojačanjem daleč premalo! V helij-neonskem laserju zato uporabimo večslojni dielektrični zrcali. Tanke plasti dielektrikov zrcal tvorijo številne manjše Fabry-Perotove rezonatorje, ki učinkovito odbijajo svetlobo izbrane valovne dolžine. Večslojna dielektrična zrcala lahko dosežejo odbojnost tudi več kot $|\Gamma| > 0.999$ na izbrani valovni dolžini in hkrati preprečujejo nihanje laserja na drugih barvah oziroma infrardečih črtah neona.

Pomanjkljivost Fabry-Perotovega rezonatorja je, da valovanje v prečnih smereh (x, y) ni omejeno. Na valovnih dolžinah svetlobe si lahko privoščimo zelo širok rezonator oziroma obe zrcali nekoliko vbočimo, da prečno omejimo njegovo elektromagnetno polje. Na radijskih frekvencah oziroma v področju mikrovalov uporabimo dvo-dimenzijski oziroma tri-dimenzijski stojni val:

2D stojni val

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_z C \sin(k_x x) \sin(k_y y)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{1}_z \frac{C}{4} \left(e^{jk_x x} - e^{-jk_x x}\right)\left(e^{jk_y y} - e^{-jk_y y}\right)$$

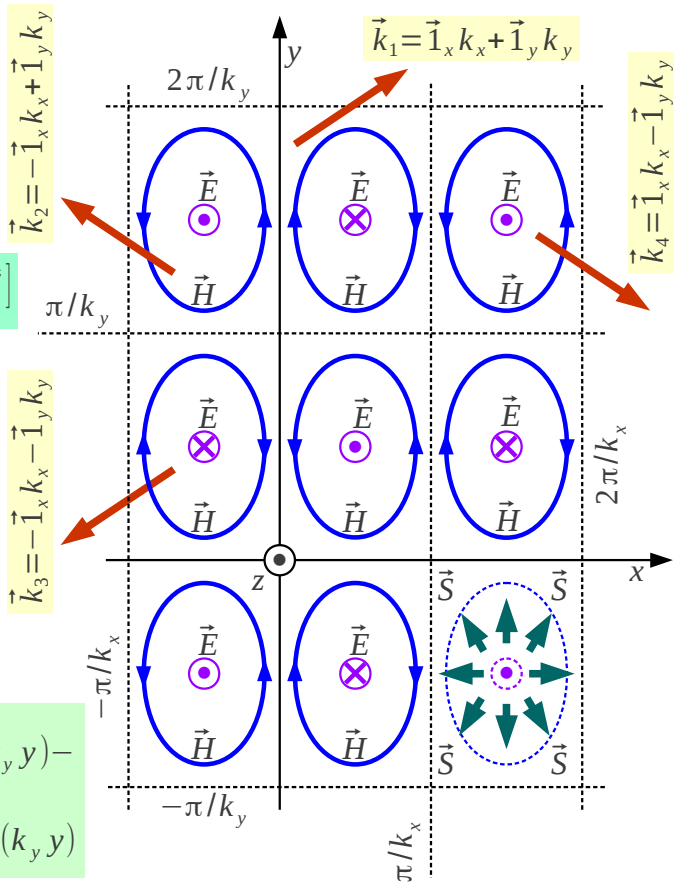
$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_z \frac{C}{4} \left[-e^{-j\vec{k}_1 \cdot \vec{r}} + e^{-j\vec{k}_2 \cdot \vec{r}} - e^{-j\vec{k}_3 \cdot \vec{r}} + e^{-j\vec{k}_4 \cdot \vec{r}}\right]$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega \mu} \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = \frac{j}{kZ} \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{1}_x \frac{jCk_y}{kZ} \sin(k_x x) \cos(k_y y) - \vec{1}_y \frac{jCk_x}{kZ} \cos(k_x x) \sin(k_y y)$$

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{H}(\vec{r})^*$$

$$\vec{S}(\vec{r}) = -\vec{1}_x \frac{j|C|^2 k_x}{2kZ} \sin(k_x x) \cos(k_x x) \sin^2(k_y y) - \vec{1}_y \frac{j|C|^2 k_y}{2kZ} \sin^2(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_y y)$$



Dvo-dimenzijski stojni val sestavimo iz štirih enako močnih potujočih ravninskih valov $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$, $\vec{k}_3$ in $\vec{k}_4$ v ravnini xy. Tudi dvo-

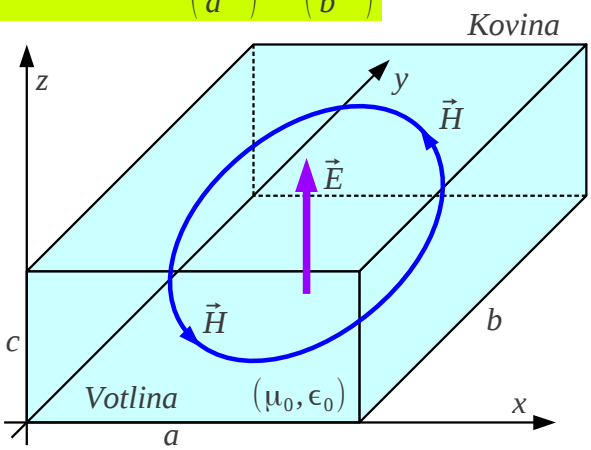
dimenzijski stojni val ima magnetno polje $\vec{H}(\vec{r})$ v kvadraturi z električnim poljem $\vec{E}(\vec{r})$. Pripadajoči Poyntingov vektor $\vec{S}(\vec{r})$ sestavljata dve povsem jalovi komponenti v ravnini xy. Energija niha med hrbti električnega polja in hrbti magnetnega polja v dveh dimenzijah.

Električna poljska jakost prikazanega dvo-dimenzijskega stojnega vala $\vec{E}(\vec{r})=\vec{1}_z C\sin(k_x x)\sin(k_y y)$ ima vozle v ravninah xz in yz ter pripadajočih vzporednih ravninah na medsebojnih razdaljah $\Delta x=\pi/k_x$ oziroma $\Delta y=\pi/k_y$. Vse ravnine, kjer je tangencialno električno polje $\vec{E}_t=0$, smemo okoviniti: omenjene ravnine vozlov $\vec{E}(\vec{r})$, vzporedne ravninam xz in yz ter poljubno ravnino, vzporedno ravnini xy, saj je električno polje nanje pravokotno.

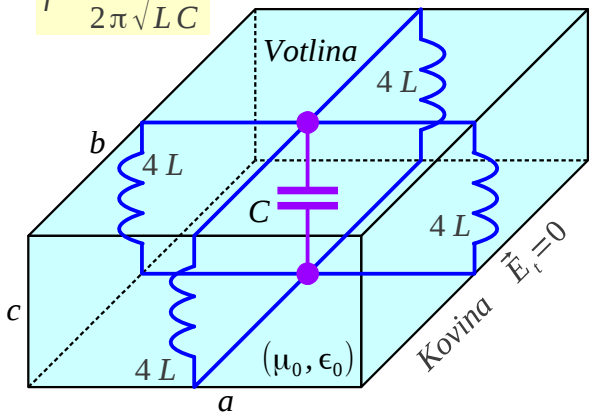
Najpreprostejši zgled pravokotne votline (μ_0,ϵ_0) ima okovinjene kar sosednje ravnine vozlov, vzporedne xz in yz, to je štiri bočne stranice kvadra ter poljubni dve ravnini, vzporedni xy, to je dno in pokrov kvadra:

Pravokotna votlina

$$\vec{E}(\vec{r})=\vec{1}_z C\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{b}y\right)$$



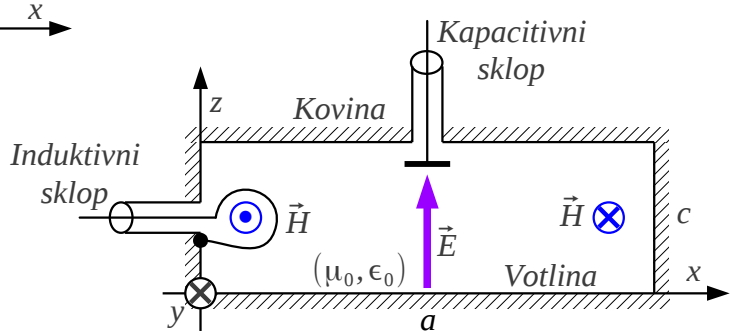
$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



$$k_0^2=k_x^2+k_y^2=\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2$$

$$f_{110}=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{k_0 c_0}{2\pi}=\frac{c_0}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}$$

$$f_{110}=\frac{c_0}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}$$



Osnovni rod nihanja opisane pravokotne votline označimo s TM_{110}. Takšna oznaka rodu pomeni prečno magnetno polje na os z, en hrbet stojnega vala v smeri x, en hrbet stojnega vala v smeri y in nič hrbtov

stojnega vala v smeri z .

Pravokotna votlina je na osnovnem rodu TM_{110} povsem enakovredna električnemu LC nihajnemu krogu. Kondenzator C predstavlja kapacitivnost med dnom in pokrovom votline. Induktivnost L tvorijo vodniki vseh štirih bočnih stranic, torej vzporedna vezava štirih tuljav $4L$.

Kvaliteta LC nihajnega kroga s koncentriranimi gradniki je omejena na $Q \approx 100$ predvsem z izgubami, ohmsko upornostjo R_{Cu} kovinskega vodnika vodnika tuljave L . Kvaliteta pravokotnega votlinskega rezonatorja TM_{110} je omejena s končno prevodnostjo γ_{Cu} kovinskih stranic rezonatorja. Pri frekvenci $f \approx 1\,\mathrm{GHz}$ votlina na osnovnem rodu TM_{110} dosega kvaliteto $Q \approx 10000$ oziroma sto-krat več od nihajnega kroga s koncentriranimi gradniki!

Višje kvalitete ne dobimo zastonj, votlina (μ_0, ϵ_0) ima precej večje izmere od koncentriranih gradnikov! Izmere rezonatorja lahko zmanjšamo tako, da namesto votline okovinimo kvader iz dobrega dielektrika, na primer metaliziramo površino kvadra iz keramike TiO_2 (titanov dioksid). Čisti TiO_2 ima na radijskih frekvencah zelo majhne izgube in dielektričnost okoli $\epsilon_r \approx 100$. Dielektrični rezonator iz posrebrene keramike ima torej $\sqrt{\epsilon_r} \approx 10$ deset-krat manjše izmere od prave votline.

Podobno kot LC nihajni krog tudi votlino vključimo v električno vezje preko induktivnega oziroma kapacitivnega sklopa. Induktivni sklop dobimo z žično zankico, ki jo vstavimo v votlino tako, da zajame čim močnejše magnetno polje $\vec{H}(\vec{r})$. Kapacitivni sklop dobimo z izolirano elektrodo, ki jo vstavimo v votlino tam, kjer je električno polje $\vec{E}(\vec{r})$ najmočnejše.

Vsaka votlina lahko poleg osnovnega rodu niha na številnih višjih rodovih. Višje rodove lahko predstavlja dvo-dimenzijski stojni val, to se pravi štirje potujoči ravninski valovi v poljubnih dveh koordinatah (ravnini) oziroma tri-dimenzijski stojni val, to se pravi osem potujočih ravninskih valov v prostoru. Rezonančne frekvence posameznih rodov okovinjene pravokotne votline (μ_0, ϵ_0) oziroma kvadra snovi (μ_r, ϵ_r) dobimo z izrazom:

$$f_{lmn} = \frac{c_0}{2\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{c}\right)^2}$$

V gornjem izrazu so indeksi $l,m,n=0,1,2,3,4,5,6...$ pozitivna cela števila in vsaj dva morata biti od nič različna! Izmere pravokotne votline običajno izberemo v razmerju $a=b=2c$. Večanje c zvišuje prostornino rezonatorja in kvaliteto Q ter pri tem ne vpliva na osnovno rezonančno frekvenco f_{110} . Razmerje izmer izbiramo tako, da so rezonančne frekvence višjih rodov čim bolj oddaljene od frekvence osnovnega rodu:

$$f_{120}=f_{210}=f_{101}=f_{011}=f_{110}\sqrt{5/2}\approx 1.581 f_{110}$$

Pri tem ne smemo pozabiti, da niti LC nihajni krog ni brezhiben. Vsaka tuljava ima porazdeljeno kapacitivnost med ovoji, vsak kondenzator pa porazdeljeno induktivnost elektrod. Vsak nihajni krog z resničnimi koncentriranimi gradniki ima torej tudi višje rezonančne frekvence, ki jih pa zaradi nenatančnega elektromagnetnega opisa ne moremo tako preprosto določiti kot pri pravokotni votlini.

Zaporedje indeksov l,m,n oziroma zaporedje izmer a,b,c se običajno nanaša na zaporedje koordinat (x,y,z) . Nekateri uporabljajo tudi obratno zaporedje koordinat, na primer (z,y,x) pri zapisu indeksov oziroma izmer. Kartezične koordinate so med sabo enakovredne, kar pa za valjne (ρ,ϕ,z) oziroma drugačne krivočrtne koordinate ne drži!

Povsem jasno tudi okovinjen votel valj deluje kot rezonančna votlina, saj narava nič ne ve, kateri koordinatni sistem je nam ljubši. Rezonančne frekvence okovinjenega votlega valja poiščemo preko rešitve valovne enačbe v valjnih koordinatah (ρ,ϕ,z) :

Valjni Laplace

$$\text{Valjne koordinate} \quad \vec{E}(\rho,\phi,z)$$

$$\vec{1}_\rho \neq konst. \quad \vec{1}_\phi \neq konst. \quad \vec{1}_z = konst.$$

$$0=\Delta\vec{E}+k^2\vec{E}=\Delta\vec{E}_t+\vec{1}_z\Delta E_z+k^2\vec{E}$$

$$\Delta E_z(\rho,\phi,z)+k^2E_z(\rho,\phi,z)=0$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2E_z}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2E_z}{\partial z^2}+k^2E_z=0$$

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)-\frac{m^2}{\rho^2}+k^2-\beta^2=0 \qquad k_\rho^2=k^2-\beta^2$$

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)-\frac{m^2}{\rho^2}+k_\rho^2=0$$

$$R(\rho)=J_m(k_\rho\rho) \quad \text{brez singularnosti}(\rho=0)$$

$$J_m(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(t/2)^{2n+m}}{n!(n+m)!}$$

$$\text{grad}\,E_z=\vec{1}_\rho\frac{\partial E_z}{\partial\rho}+\vec{1}_\phi\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi}+\vec{1}_z\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\Delta E_z=\text{div}(\text{grad}\,E_z)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2E_z}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2E_z}{\partial z^2}$$

$$E_z(\rho,\phi,z)=R(\rho)F(\phi)Z(z)$$

$$\frac{1}{\rho R}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\underbrace{\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\phi^2}}_{-m^2}+\underbrace{\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}}_{-\beta^2}+k^2=0$$

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\phi^2}=-m^2 \;\rightarrow\; F(\phi)=C_1\cos(m\phi)+C_2\sin(m\phi)$$

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-\beta^2 \;\rightarrow\; Z(z)=C_3\cos(\beta z)+C_4\sin(\beta z)$$

$$E_z(\rho,\phi,z)=J_m(k_\rho\rho)\left[C_1\cos(m\phi)+C_2\sin(m\phi)\right]\left[C_3\cos(\beta z)+C_4\sin(\beta z)\right]$$

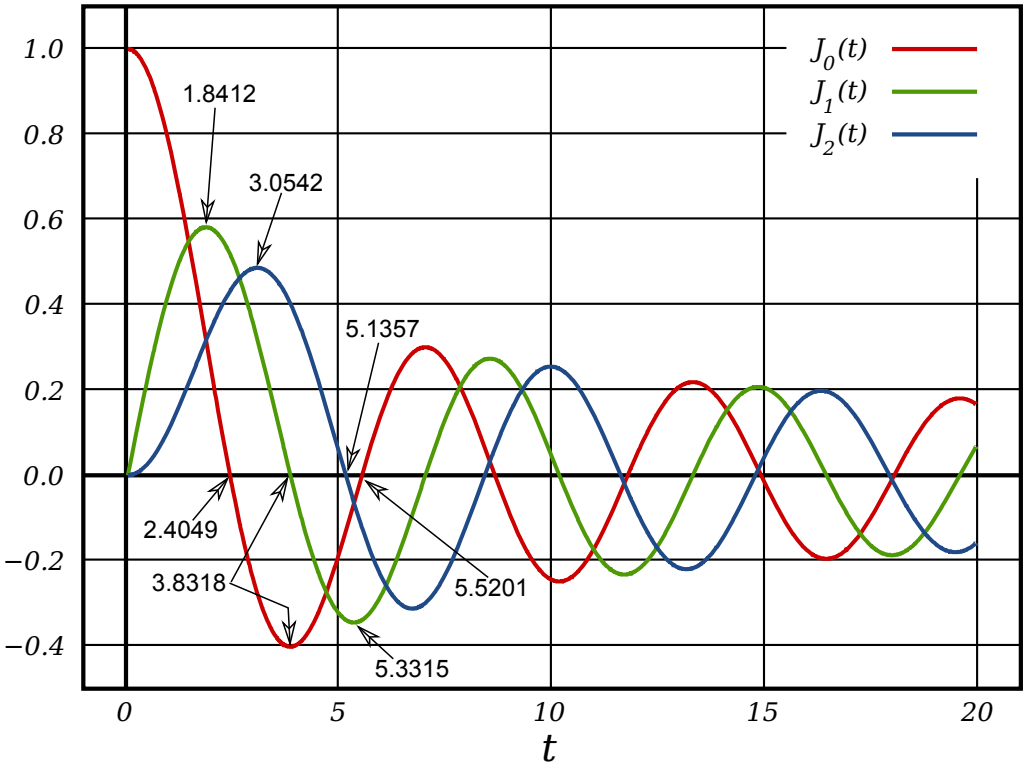
V valjnih koordinatah (ρ,ϕ,z) ima vektorski Laplace preprosto komponento v smeri osi z. Naloge elektrodinamike v valjnih koordinatah običajno rešujemo tako, da najprej poiščemo komponenti polja E_z oziroma H_z ter nato iz njih izračunamo preostale prečne komponente polja.

Rešitev skalarne valovne enačbe iščemo v obliki produkta funkcij ene spremenljivke $E_z(\rho,\phi,z)=R(\rho)F(\phi)Z(z)$. Rešitvi za $F(\phi)$ in $Z(z)$ zapišemo s trigonometrijskimi funkcijami, saj iščemo stojni val. Ker sredi votline ni singularnosti, kot rešitev za $R(\rho)=J_m(k_\rho\rho)$ zadošča že Besselova funkcija reda m :

Besselove funkcije

$$J_m(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(t/2)^{2n+m}}{n!(n+m)!}$$

$$J_m(t\gg 1)\approx\sqrt{2/(\pi t)}\cos(t-\pi/4-m\pi/2)$$



Izračun valjnega rezonatorja zakomplicirajo ničle Besselovih funkcij $J_m(t)$ ter njihovih odvodov $J_m'(t)$, ki jih ne moremo določiti tako preprosto kot pripadajočih lastnosti trigonometrijskih funkcij. Šele pri velikih argumentih $t\gg 1$ Besselove funkcije postanejo podobne trigonometrijskim funkcijam.

Rodu TM_{110} v pravokotni votlini je enakovreden rod TM_{100} v votlem valjnem rezonatorju. Polje osnovnega rodu $\vec{E}(\vec{r})=\vec{1}_z C J_0(k_0\rho)$ ni odvisno od azimuta $\partial/\partial\phi=0$, torej je $m=0$, niti od višine $\partial/\partial z=0$, torej je $\beta=0$. Konstanta $k_\rho=k_0$ je tedaj kar enaka valovnemu številu v praznem prostoru znotraj votline.

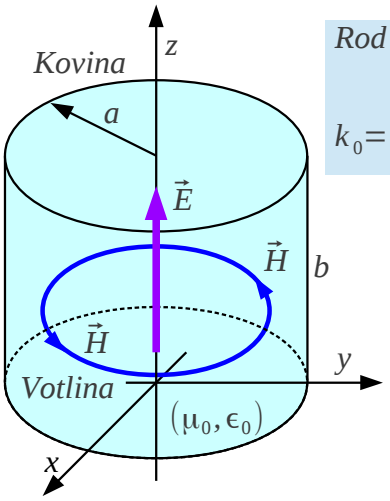
Pripadajoče magnetno polje $\vec{H}(\vec{r})$ osnovnega rodu TM_{100} ima samo komponento v smeri $\vec{1}_\phi$, ki jo izračunamo preko Faradayevega zakona. Z Gaussovim in Ampèrejevim zakonom preverimo, da opisano elektromagnetno polje zadošča vsem Maxwellovim enačbam in nima drugih komponent. Osnovni rod TM_{100} ima prvo ničlo električnega polja na plašču valja $\vec{E}(\rho=a)$, ko velja $k_0=2.4049/a$:

Valjni rezonator

$$\frac{\partial}{\partial \phi}=0 \rightarrow m=0$$
$$\frac{\partial}{\partial z}=0 \rightarrow \beta=0$$

$$\vec{E}(\vec{r})=\vec{1}_z C J_0(k_0 \rho)$$

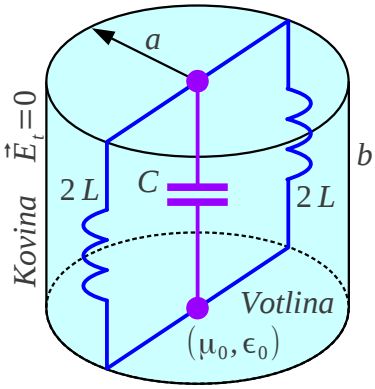
$$\vec{H}(\vec{r})=\frac{j}{k_0 Z_0}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r})=\vec{1}_\phi \frac{-jC}{Z_0} J_0'(k_0 \rho)$$



Rod TM_{100}

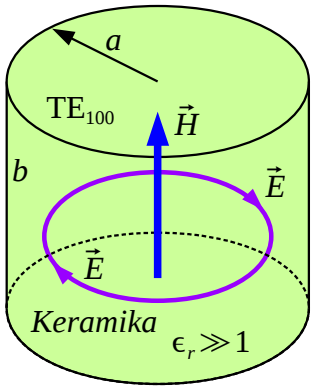
$$k_0=\frac{2.4049}{a}$$

$$f_{100}=\frac{k_0 c_0}{2\pi}=\frac{2.4049\, c_0}{2\pi a}\approx\frac{114.75\,\mathrm{MHz.m}}{a}$$



$$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Dielektrični rezonator



Zrak
(μ_0, ϵ_0)
$\vec{H}_t \approx 0$

$\mathrm{TiO_2}$ $\quad \epsilon_r \approx 100$

$$f_{100}\approx\frac{2.4049\, c_0}{2\pi a\sqrt{\epsilon_r}}$$

$$\vec{H}(\vec{r})\approx\vec{1}_z C J_0(k\rho)$$

$$\vec{E}(\vec{r})\approx\vec{1}_\phi jCZ J_0'(k\rho)$$

Iz valovnega števila dobimo rezonančno frekvenco $f=k_0 c_0/2\pi$ osnovnega rodu. Frekvence nekaterih višjih rodov lahko odmaknemo višje tako, da izbiramo manjšo višino valja $b<a$ v primerjavi s polmerom valja. Povsem enako kot pravokotna votlina je tudi valjni rezonator nadomestek LC nihajnega kroga. Pri enaki prostornini dosega valjni rezonator celo malenkost višjo kvaliteto Q od pravokotne votline.

Valjna votlina ima svoj dualni zgled, dielektrični rezonator v obliki keramičnega valja, ki niha na osnovnem rodu TE_{100}. Če je dielektričnost valja iz keramike zelo visoka $\epsilon_r \gg 1$, se okoliški zrak oziroma prazen prostor (μ_0, ϵ_0) obnaša skoraj kot odprte sponke, kar zahteva $\vec{H}_t \approx 0$ na plašču valja. Dielektrični rezonator ne vsebuje kovine, torej ni ohmskih izgub! Dielektrični rezonator ima kvečjemu izgube zaradi nečistoč v keramiki.

Žal elektromagnetno polje dielektričnega rezonatorja ni povsem zaključeno v keramiki $\epsilon_r \gg 1$. Brez dodatnega kovinskega oklopa dielektrični rezonator seva kot antena. Tokovi v kovinskem oklopu dodajajo izgube, kar znižuje kvaliteto Q dielektričnega rezonatorja.

Navedeni izrazi za elektromagnetno polje in rezonančno frekvenco so samo grobi približki. Točno frekvenco določa kovinski oklop na določeni

razdalji od keramike. Če ravno kovinsko ploščo približujemo osnovnici oziroma pokrovu valja, se rezonančna frekvenca viša. Z spreminjanjem razdalje med dielektričnim valjem in kovinskima ploščama pod in nad njim lahko natančno nastavimo rezonančno frekvenco.

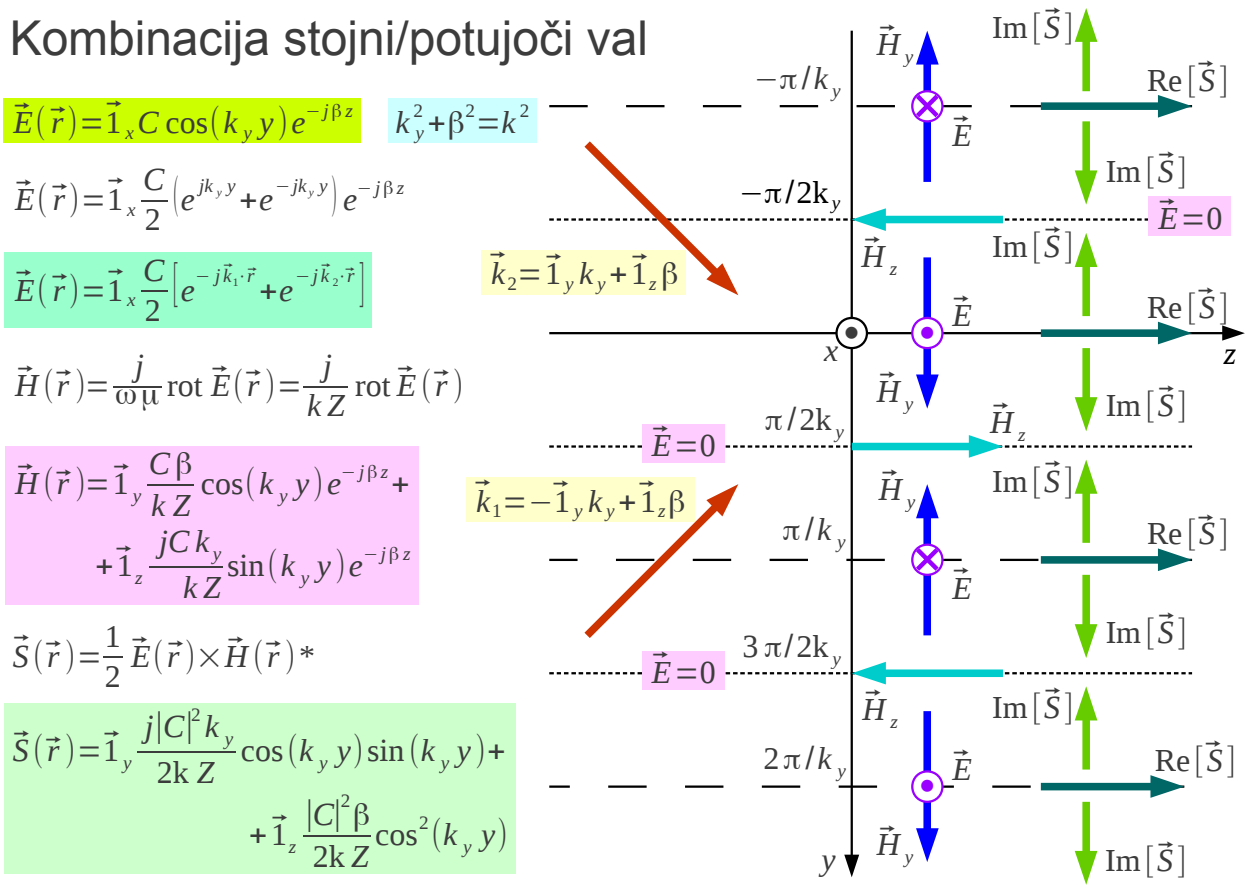
Ker v osi valja ni električnega polja rodu TE_{100} , dielektrični rezonator pogosto izdelamo kot obroček iz keramike. Luknjo v sredini uporabimo za pritrditev oziroma z njo odmaknemo rezonančne frekvence nekaterih višjih rodov. Dielektrični rezonator običajno sklopimo v električno vezje z malimi antenami, ki so postavljene v smeri električnega polja $\vec{1}_\phi$ ob plašču valja.

* * * * *

15. Kovinski valovod

Potujoči ravninski val opisuje pojav v neomejenem prostoru. Stojni val v votlinskem rezonatorju je sestavljen iz dveh ali več potujočih valov v omejenem prostoru, ki ga omejujejo okovinjene ploskve z ničelno $\vec{E}_t=0$ tangencialno komponento električnega polja. Končno lahko iz dveh ali več potujočih ravninskih valov sestavimo tudi kombinacijo stojnega vala v eni ali dveh dimenzijah ter potujočega vala v preostali dimenziji prostora.

Preprost zgled kombinacije dveh potujočih ravninskih valov, ki ju opisujeta valovna vektorja $\vec{k}_1$ in $\vec{k}_2$, tvori stojni val v smeri osi y in napredujoči val v smeri osi z :

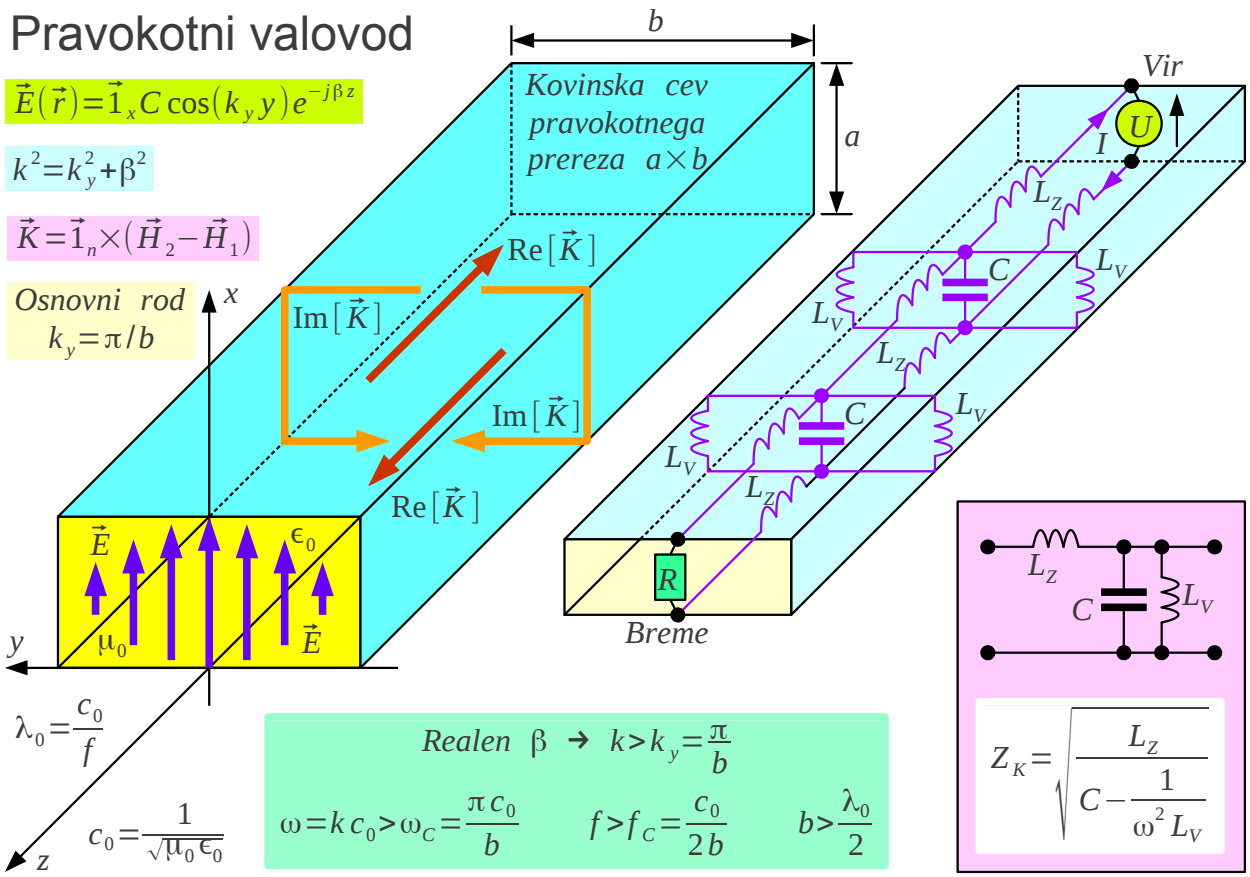


Skladno z razlago valov ima pripadajoči Poyntingov vektor $\vec{S}$ povsem delovno komponento $\vec{1}_z S_z=\mathrm{Re}[\vec{S}]$ v smeri potujočega vala in popolnoma jalovo komponento $\vec{1}_y S_y=j\,\mathrm{Im}[\vec{S}]$ v smeri stojnega vala. V koordinatnih smereh, v katerih je Poyntingov vektor povsem jalov, lahko stojni val prostorsko omejimo, torej okovinimo ploskve, kjer je tangencialna električna

poljska jakost $\vec{E}_t=0$ enaka nič.

V smeri potujočega vala prostora ne omejujemo, pač pa uporabimo predlagano napravo, da vodi valovanje natančno v tej smeri. Zamisel se je pojavila že v drugi polovici 19. stoletja. Matematično nalogo je razrešil Lord Rayleigh in leta 1897 dokazal, da votla kovinska cev poljubnega prereza lahko vodi elektromagnetno valovanje v obliki različnih rodov. Šele z razvojem mikrovalovne tehnike in radarja v prvi polovici 20. stoletja postane kovinski valovod z eno samo votlo cevjo, bolj točno votlovod (nemško: Hohlleiter, angleško: hollow waveguide), praktično uporabna in koristna naprava.

Pri opisani kombinaciji stojni/potujoči val smemo okoviniti natančno določene ploskve, vzporedne z ravnino xz, ki ustrezajo vozlom stojnega vala električnega polja. Hkrati smemo okoviniti poljubno ploskev, vzporedno ravnini yz, saj je električno polje nanjo pravokotno. Z okovinjanjem dobimo kovinsko cev pravokotnega prereza $a\times b$, ki deluje kot pravokotni kovinski votlovod:



Notranjost cevi je lahko popolnoma prazen prostor s permeabilnostjo μ_0 in dielektričnostjo ϵ_0. Kovinski valovod lahko sicer izdelamo tudi z notranjostjo iz dielektrika z $\epsilon_r>1$ oziroma iz feromagnetika z $\mu_r>1$, vendar ima takšna naprava običajno slabše električne lastnosti oziroma višje

izgube od pravega votlovoda. Notranjost pravokotnega valovoda zato kvečjemu zapolnimo z osušenim zrakom pod nadtlakom, da preprečimo vdor vlage. Prenos velikih moči zahteva v notranjosti cevi izolacijski plin, na primer žveplov heksafluorid SF_6, ki ima višjo električno prebojno trdnost od zraka.

Mejni pogoji za magnetno polje $\vec{H}$ zahtevajo ploskovne tokove $\vec{K}$ v vseh okovinjenih ploskvah, ko zunaj cevi ni elektromagnetnega polja. Ploskovni tokovi so povsem jalovi $\mathrm{Im}[\vec{K}]$ v smeri stojnega vala in povsem delovni $\mathrm{Re}[\vec{K}]$ v smeri potujočega vala. Ploskovni tok nam tudi pove, kam priključiti izmenični vir, kam breme in kakšno je pričakovano električno obnašanje opisane naprave?

Zgornja in spodnja, torej široki stranici (b) opisanega valovoda se obnašata kot trakasti dvovod s porazdeljeno zaporedno induktivnostjo L_z in porazdeljeno medsebojno kapacitivnostjo C. Bočni oziroma ozki stranici (a) se obnašata kot dodatna porazdeljena vzporedna induktivnost L_v. Pravokotni votlovod opišemo torej z nadomestnim vezjem, še bolj natančno z verižno vezavo velikega števila takšnih vezij za diferencialno kratke odseke votlovoda.

Iz nadomestnega električnega vezja ugotovimo, da je karakteristična impedanca Z_K pri nizkih frekvencah povsem reaktivna (jalova). Karakteristična impedanca postane pri določeni frekvenci $\omega_C = 1/\sqrt{L_V C}$ neskončno velika in od tam naprej je pri visokih frekvencah povsem delovna (realna). Pravokotni kovinski valovod se obnaša torej kot visokoprepustno frekvenčno sito.

Do enakovredne ugotovitve pridemo iz zapisa elektromagnetnega polja v pravokotnem kovinskem valovodu. Če naj naprava vodi valovanje, mora biti fazna konstanta $\beta = \sqrt{k^2 - k_y^2}$ povsem realna. Torej mora veljati $k > k_y$ oziroma $\omega > \omega_C$ oziroma $f > f_C$, kjer indeks C pomeni frekvenčno mejo, angleško: cutoff frequency. Frekvenčno mejo si zapomnimo iz pogoja za širšo stranico valovoda $b > \lambda_0/2$, ki mora biti širša od polovice valovne dolžine λ_0 v neomejenem prostoru z enakimi snovnimi lastnostmi, kot jih ima notranjost cevi.

Električno nadomestno vezje se izogiblje izmeram resnične naprave. Hitrost valovanja lahko torej določimo samo iz elektromagnetnega polja, ki ga zapišemo v časovnem prostoru $\vec{E}(\vec{r}, t)$. Hitrost valovanja, ki vsebuje eno samo frekvenco ω, dobimo iz pogoja za fazo. Če jezdimo na valu v isti točki, se faza ne sme spreminjati. Rezultat je na prvi pogled presenetljiv,

fazna hitrost (angleško: phase velocity) $v_f > c_0$ je vedno večja od svetlobne hitrosti za katerikoli rod m nad svojo pripadajočo frekvenčno mejo $f > f_{0m}$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_x C \cos(k_y y) e^{-j\beta z}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{1}_x \frac{C}{2}\left[e^{-j\vec{k}_1\cdot\vec{r}} + e^{-j\vec{k}_2\cdot\vec{r}}\right]$$

Rodovi TE_{0m}

$$k_y = m\cdot\frac{\pi}{b} \qquad m = 1,2,3,4,5\ldots$$

$$\beta = \sqrt{k^2 - k_y^2}$$

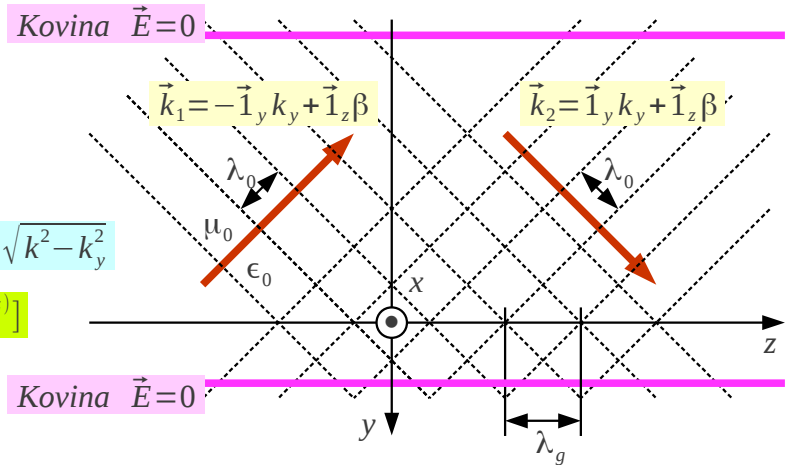
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{1}_x \cos(k_y y)\,\mathrm{Re}[C e^{j(\omega t - \beta z)}]$$

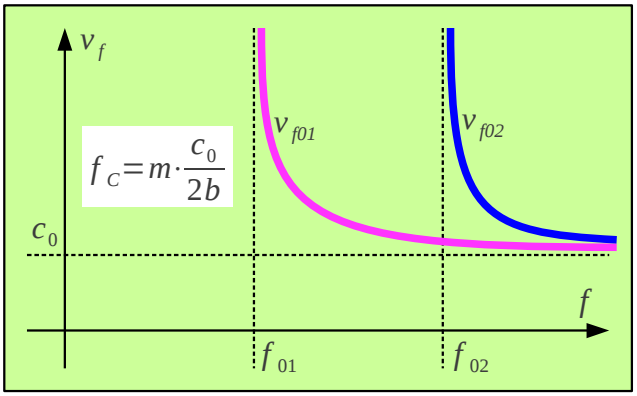
Jezdimo na valu:
Faza $\omega t - \beta z = konst.$

$$\frac{d}{dt}(\omega t - \beta z) = 0 = \omega - \beta\frac{dz}{dt} = \omega - \beta v_f$$

Fazna hitrost $$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\sqrt{1-\frac{k_y^2}{k^2}}} = \frac{c_0}{\sqrt{1-\frac{f_C^2}{f^2}}} > c_0$$

Valovodna valovna dolžina $$\lambda_g = \frac{v_f}{f} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-\frac{f_C^2}{f^2}}} > \lambda_0$$





Fazna hitrost

Razlaga postane nazornejša, če ne okovinimo dveh sosednjih vozlov električnega polja, pač pa izberemo okovinjeni ploskvi tako, da je med njima m hrbtov stojnega vala električne poljske jakosti. Na gornji sliki ravninskih valov $\vec{k}_1$ in $\vec{k}_2$ ima stojni val $m=9$ hrbtov, kar ustreza rodu valovanja TE_{09} med okovinjenima ravninama. Valovne fronte vsakega ravninskega vala so pravokotne na pripadajoči valovni vektor in so med sabo razmaknjene za valovno dolžino λ_0 v praznem prostoru.

Navidezna valovna dolžina v valovodu $\lambda_g = 2\pi/\beta$ (angleško: lambda guided) je razdalja med projekcijama dveh sosednjih valovnih front na os z in je zato nujno večja $\lambda_g > \lambda_0$ od valovne dolžine v praznem prostoru. Projekcija $\lambda_g = v_f/f$ je lahko zelo velika in postane celo neskončna $\lambda_g \to \infty$ tik ob mejni frekvenci $f \approx f_{0m}$ pripadajočega rodu valovanja. Z višanjem frekvence se fazna hitrost kateregakoli rodu valovanja znižuje in približuje $v_f \to c_0$ hitrosti svetlobe v praznem prostoru.

Opisani pojavi niso v nasprotju z relativistiko. Relativistika sicer zahteva, da niti energija niti informacija ne moreta potovati s hitrostjo, večjo od svetlobe. Fazno hitrost v_f smo izračunali za eno samo frekvenco ω z neskončno ozkim spektrom, takšen signal zato ne prenaša nobene informacije. Valovna dolžina λ_g v valovodu je samo projekcija, ki je lahko poljubno velika.

Hitrost potovanja energije oziroma informacije imenujemo skupinska hitrost v_g (angleško: group velocity). Določimo jo iz hitrosti potovanja ovojnice signala, ki vsebuje najmanj dve različni frekvenci ω_A in ω_B :

Dvotonsko krmiljenje $\omega_A, \omega_B \gg \omega_A - \omega_B = \Delta\omega$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{1}_x \cos(k_y y)\,\mathrm{Re}\left[A e^{j(\omega_A t - \beta_A z)} + B e^{j(\omega_B t - \beta_B z)}\right]$$

$\phi_A = \omega_A t - \beta_A z$ $\qquad$ $\langle\phi\rangle = (\phi_A + \phi_B)/2$ *...hiter!*

$\phi_B = \omega_B t - \beta_B z$ $\qquad$ $\Delta\phi = \phi_A - \phi_B$ *...počasen!*

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{1}_x \cos(k_y y)\,\mathrm{Re}\left[e^{j\langle\phi\rangle}\left(A e^{j\Delta\phi/2} + B e^{-j\Delta\phi/2}\right)\right]$$

Ovojnica

Jezdimo na ovojnici:
$\Delta\phi = \Delta\omega t - \Delta\beta z = konst.$

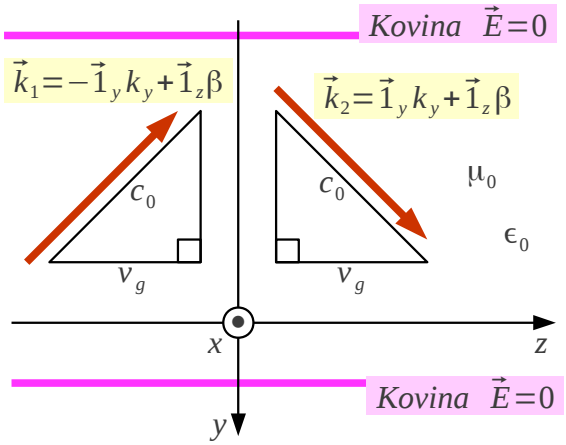
$$\frac{d}{dt}(\Delta\omega t - \Delta\beta z) = 0 = \Delta\omega - \Delta\beta \frac{dz}{dt}$$

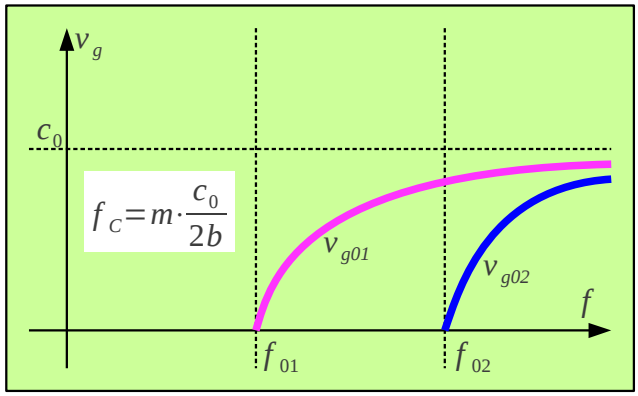
Skupinska hitrost $v_g = \lim_{\Delta\omega \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \frac{d\omega}{d\beta}$

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\sqrt{k^2 - k_y^2} = \frac{2\omega/c_0^2}{2\sqrt{k^2 - k_y^2}} = \frac{1}{c_0\sqrt{1 - \frac{k_y^2}{k^2}}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = c_0\sqrt{1 - \frac{f_C^2}{f^2}} < c_0$$

Skupinska hitrost





Električno polje $\vec{E}(\vec{r},t)$ dvotonskega krmiljenja zapišemo v časovnem prostoru. Zapis razstavimo na hitri člen in počasne člene. Počasni členi nihajo s polovico razlike frekvenc $\Delta\omega = \omega_A - \omega_B$, ki je lahko poljubno majhna, torej poljubno počasen pojav. Skupinsko hitrost v_g določimo tako, da jezdimo na ovojnici, ki jo določajo počasni členi. Skupinska hitrost $v_g < c_0$ je vedno manjša od svetlobne hitrosti ravninskih valov v notranjosti votlovoda, kar je povsem v skladu z relativistiko.

Za skupinsko hitrost v_g obstaja še preprostejša razlaga. Ravninski val $\vec{k}_1$ zadene ob kovinsko steno in se pri odboju pretvori v ravninski val

$\vec{k}_2$. Slednji zadene ob drugo kovinsko steno in se tam pretvori nazaj v izvorni val $\vec{k}_1$. V pravokotnem valovodu torej elektromagnetno valovanje cikcaka med kovinskima stenama. Projekcija svetlobne hitrosti c_0 na os z valov $\vec{k}_1$ ali $\vec{k}_2$ je natančno skupinska hitrost v_g .

Tik ob mejni frekvenci $f \approx f_{0\mathrm{m}}$ opazovanega rodu je cikcak zelo gost in gre $v_g \rightarrow 0$ proti nič. Večina elektromagnetnega polja v votlovodu daje energijo stojnega vala, moč napredujočega vala pa je razmeroma majhna. Z višanjem frekvence se cikcak redči. Energija stojnega vala se z višanjem frekvence niža, kar opisuje člen k_y/k jalove komponente gostote pretoka moči $\mathrm{Im}[\vec{S}]$. Moč napredujočega vala se z višanjem frekvence veča, kar opisuje člen β/k delovne komponente gostote pretoka moči $\mathrm{Re}[\vec{S}]$.

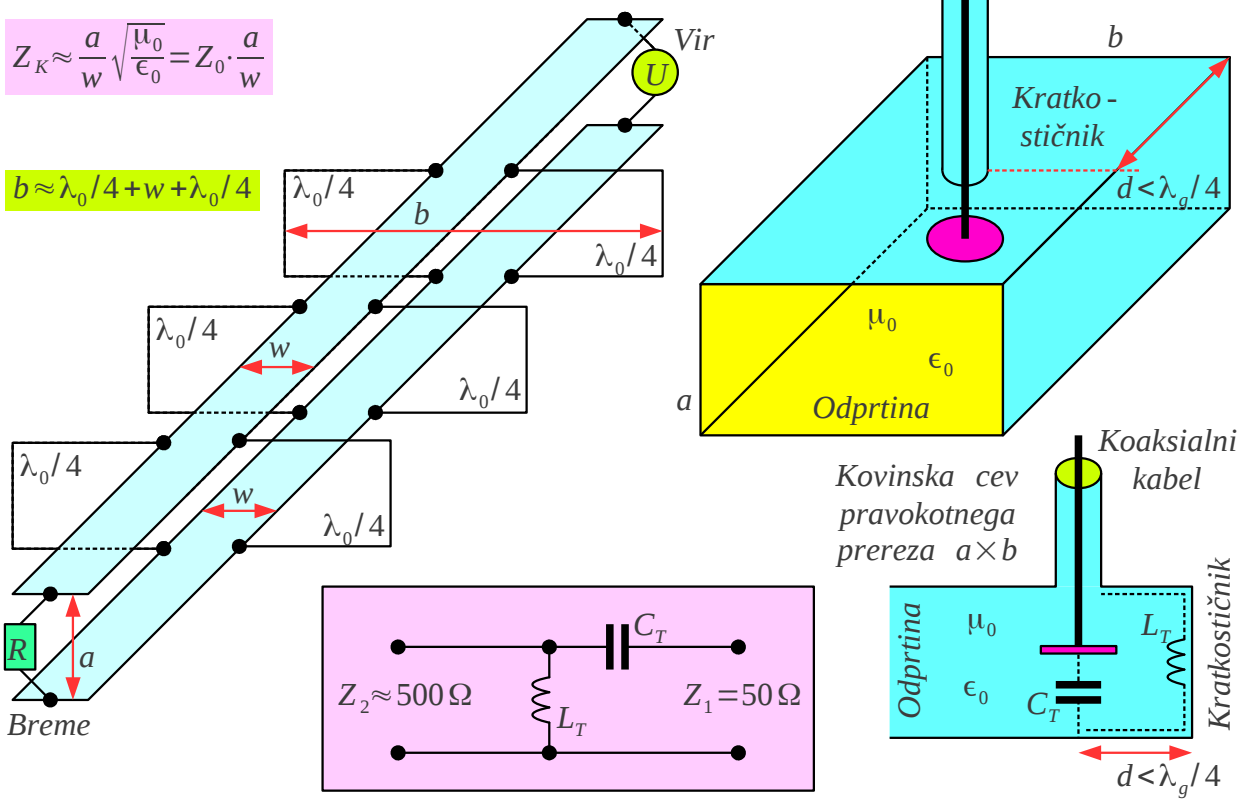
Pravokotni kovinski valovod želimo uporabiti v praktičnih napravah, elektronskih vezjih in antenah. Tako sodobna polprevodniška elektronska vezja kot antene delajo z razmeroma nizkimi impedancami v velikostnem razredu $Z_K \approx 50\,\Omega$ impedance običajnega koaksialnega kabla. Pravokotni kovinski valovod deluje z višjimi impedancami in potrebuje primeren transformator.

Strogo gledano električna napetost U sploh ne obstaja v kovinskem votlovodu, saj je vrtinčenje električne poljske jakosti $\mathrm{rot}\,\vec{E} \neq 0$ različno od nič! Ploskovni tok $\vec{K}$ v stenah lahko sicer »seštejemo« v tok I , če je to sploh smiselno? Karakteristične impedance pravokotnega votlovoda žal ne moremo definirati kot $Z_K = U/I$.

Kot merilo za impedanco votlovoda se pogosto navaja razmerje prečnih komponent polja $Z = E_{prečni}/H_{prečni}$, torej valovna impedanca. Slednje je sicer pravilno definirano, a je v električnih vezjih neuporabno. V takšni definiciji impedanca osnovnega rodu TE_{01} sploh ni odvisna od ožje stranice a pravokotne kovinske cevi.

Bolj uporabna je sicer zelo groba razlaga delovanja pravokotnega kovinskega valovoda kot osrednjega trakastega dvovoda, ki ima ob straneh še kovinske opornice. Slednje izberemo dolžine $\lambda_0/4$, da kratek stik ožje stranice valovoda preslikajo v odprte sponke ob osrednjem trakastem dvovodu:

Transformator valovod/koaks



Karakteristično impedanco Z_K določata širina $w \approx b - \lambda_0/2$ in razdalja a med vodnikoma osrednjega trakastega dvovoda. Navidezne odprte sponke bočnih opornic naj ne bi imele učinka na karakteristično impedanco Z_K. V takšnem grobem približku je karakteristična impedanca opisanega voda $Z_K = U/I \approx Z_0 \cdot a/w$. Pri tem je $Z_0 \approx 377\,\Omega$ valovna impedanca (praznega) prostora znotraj votle cevi.

Širina obeh trakov w narašča s frekvenco od začetne vrednosti nič pri mejni frekvenci $f \approx f_{0m}$. Karakteristična impedanca je pri mejni frekvenci neskončno velika in nato z naraščanjem frekvence upada. Grobi približek pravi, da bo karakteristična impedanca opisanega votlovoda v velikostnem razredu $Z_2 \approx 500\,\Omega$ oziroma za en velikostni razred (desetkrat) večja od karakteristične impedance koaksialnega kabla $Z_1 = 50\,\Omega$.

Transformacijo impedance opravi vezje z zaporednim kondenzatorjem kapacitivnosti C_T in vzporedno tuljavo induktivnosti L_T. Kondenzator C_T je običajno izdelan kot elektroda, ki je pritrjena na žilo koaksialnega kabla. Druga plošča kondenzatorja je kar spodnja široka stranica pravokotne cevi. Oklop koaksialnega kabla je spojen na gornjo široko stranico cevi.

Pravokotna kovinska cev je na enem koncu kratkosklenjena. Če je razdalja med kondenzatorjem C_T in kratkostičnikom $d<\lambda_g/4$ manjša od četrtine valovodne valovne dolžine, se kratek stik preslika v induktivnost L_T na priključku kondenzatorja C_T. Natančno vrednost induktivnosti L_T seveda izbiramo s položajem kovinske stene (kratkostičnika) oziroma z nastavljanjem razdalje d.

Drugi konec kovinske cevi se nadaljuje v pravokotni valovod poljubne dolžine. Slednji se lahko zaključi s ponovnim transformatorjem nazaj na koaksialni kabel oziroma z odprtino. Odprtina na koncu valovoda sploh ne predstavlja odprtih sponk. Prečne izmere votlovoda so primerljive z valovno dolžino, zato se takšna odprtina obnaša kot učinkovita antena, imenovana tudi valovodni lijak.

Opisani transformator iz koaksialnega kabla na pravokotni kovinski valovod je seveda uporaben le pri tistih frekvencah, ko v pravokotni cevi lahko potuje le osnovni rod TE_{01} z najnižjo mejno frekvenco $f_C=f_{01}$. Z višanjem frekvence se v kovinski cevi pravokotnega prereza lahko širi čedalje več rodov. Rodove označimo z dvema indeksoma n in m, ki pomenita število hrbtov stojnega vala v (prečnih) smereh x in y. V pravokotnem valovodu sta kartezični koordinati x in y oziroma indeksa n in m med sabo enakovredna ter ju lahko med sabo zamenjamo.

Rodovi v pravokotni kovinski cevi imajo tudi vzdolžno komponento polja v smeri osi z. Rodove, ki imajo od nič različno $H_z\neq 0$ vzdolžno magnetno polje, imenujemo transverzalno električni rodovi $\mathrm{TE}_{\mathrm{nm}}$ (ameriška oznaka) oziroma rodovi H_{nm} (nemška oznaka). Rodove, ki imajo od nič različno $E_z\neq 0$ vzdolžno električno polje, imenujemo transverzalno magnetni rodovi $\mathrm{TM}_{\mathrm{nm}}$ (ameriška oznaka) oziroma rodovi E_{nm} (nemška oznaka).

Posamezni rodovi so popolnoma neodvisni med sabo. Vsak rod ima svojo neodvisno energijo stojnega vala W_{nm}, prenaša svojo neodvisno delovno moč P_{nm}, svojo neodvisno informacijo in ima svojo neodvisno fazno konstanto β_{nm}. Dva sicer različna rodova lahko imata popolnoma enaki fazni konstanti. Takšnima dvema rodovoma pravimo, da sta izrojena (angleško: degenerated), ker ju zaradi enakih faznih konstant zelo težko ločimo med sabo.

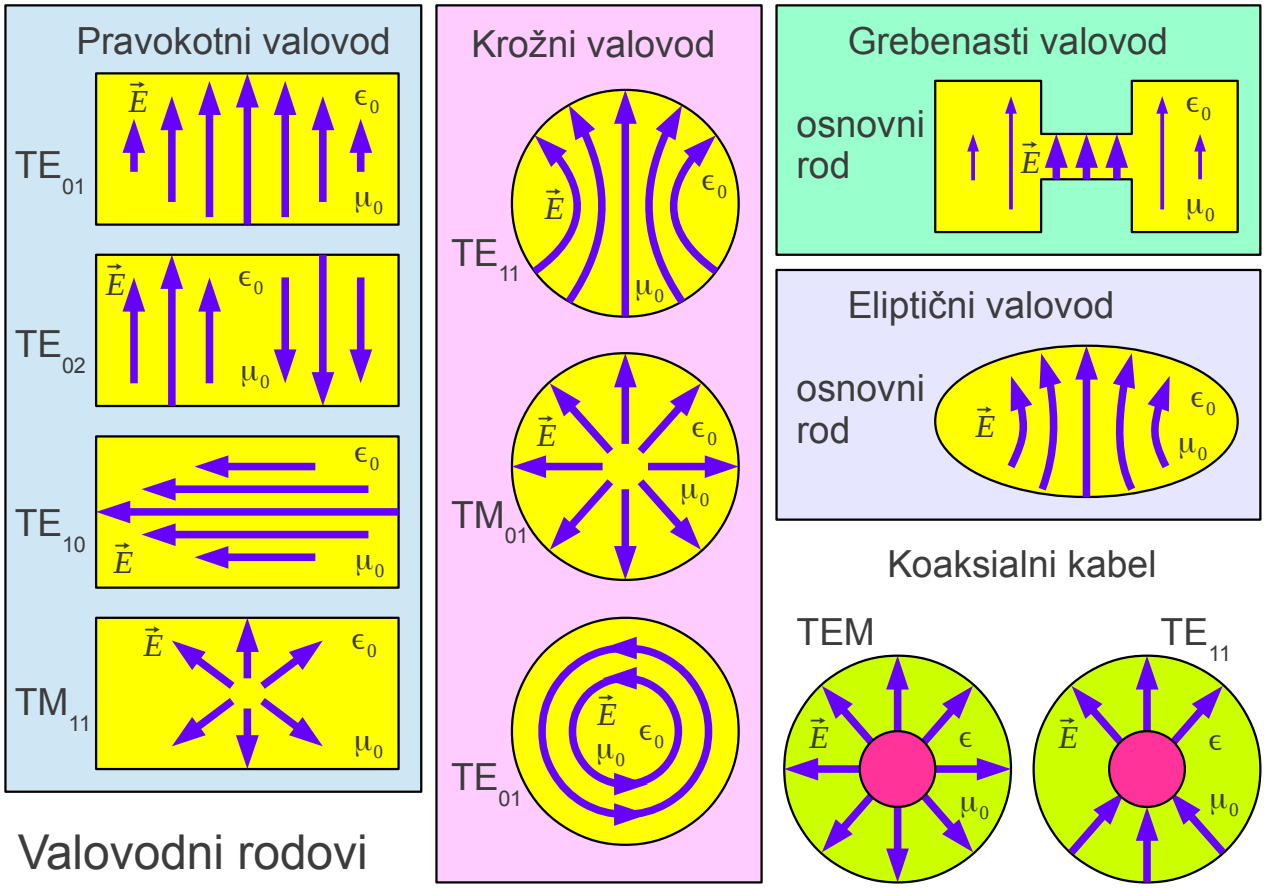
Pri praktični uporabi valovoda (običajno) želimo, da valovod prenaša en sam rod valovanja. Če valovod lahko prenaša več različnih rodov, pride zaradi mehanskih odstopanj (toleranc) kovinske cevi do sklopa med različnimi

rodovi v navidezni zaporedni vezavi cevi malenkostno različnih prerezov. Sklop med različnimi rodovi pomeni potovanje signala po različno dolgih poteh in pripadajoče popačenje večpotja.

V bližini mejnih frekvenc f_{nm} posameznih rodov se lahko izredno poveča slabljenje. Na primer, razširjen odsek cevi dopušča rodove, ki jih ožja odseka pred njim in za njim ne dopuščata. Valovanje teh mejnih rodov je ujeto v širši odsek, ki se obnaša kot votlinski rezonator, ki odžira moč rodovom nižjih redov.

Višji valovodni rodovi lahko nenamerno ali namerno povzročijo tudi odklon glavnega snopa in preoblikovanje smernega diagrama antene, valovodnega lijaka.

V opisu polja osnovnega rodu TE_{01} pravokotnega kovinskega valovoda krajša stranica a pravokotne cevi sploh ne nastopa. Majhen a sicer pomeni večje izgube zaradi električne upornosti kovinskih sten, večji a pa pojav rodov s stojnim valom v smeri x. Razmerje stranic pravokotne cevi običajno izberemo $b=2\mathrm{a}$, da mejna frekvenca rodu TE_{10} s stojnim valom v smeri x sovpada $f_{10}=f_{02}$ z mejno frekvenco naslednjega višjega rodu TE_{02} s stojnim valom v smeri y :



Valovodni rodovi

Opisana izbira razmerja stranic $b=2a$ omogoča frekvenčni pas enorodovnega delovanja pravokotnega kovinskega votlovoda v razponu $f_{max}:f_{min}=2:1$. Uporaben frekvenčni pas pravokotnega valovoda je ožji, približno $f_{max}:f_{min}\approx 1.5:1$. V praksi se izogibljemo predvsem spodnji frekvenčni meji osnovnega rodu (~30%), kjer sta slabljenje zaradi velike jalove energije gostega cikcaka in popačenje zaradi spreminjanja $\beta(\omega)$ zelo visoka. Gornji frekvenčni meji se lahko približamo na ~5%, da ne vzbudimo višjih rodov zaradi mehanskih toleranc cevi oziroma krivin.

Na primer, sprejemnik za satelitsko TV v frekvenčnem pasu $12\,\mathrm{GHz}$ uporablja standardizirani valovod WR75 (ali WG17 ali R120) kot vhodni priključek. Valovod WR75 je namenjen delovanju v frekvenčnem pasu $10\,\mathrm{GHz}...15\,\mathrm{GHz}$. Notranje izmere $a=0.375''(\mathrm{cole})\approx 9.5\,\mathrm{mm}$ in $b=0.75''(\mathrm{cole})\approx 19\,\mathrm{mm}$ določajo frekvenčno mejo osnovnega rodu $f_{01}=7.87\,\mathrm{GHz}$ in frekvenčno mejo višjih rodov $f_{02}=f_{10}=15.74\,\mathrm{GHz}$.

Širši frekvenčni pas omogoča drugačen presek kovinske cevi. Grebenasti valovod (angleško: ridge waveguide) je v osrednjem delu skrčen z ene ali z obeh strani (angleško: double-ridge waveguide), da je karakteristična impedanca Z_K trakastega dvovoda nižja. Višja kapacitivnost trakastega dvovoda znižuje frekvenčno mejo f_{01} osnovnega rodu in hkrati nima večjega učinka na mejne frekvence f_{nm} višjih rodov.

Uporaben frekvenčni pas grebenastega valovoda na ta način dosega $f_{max}:f_{min}=3:1$ in več. Omejitev predstavlja povečano slabljenje zaradi nižje karakteristične impedance Z_K osrednjega trakastega dvovoda. Nižja karakteristična impedanca Z_K grebenastega valovoda sicer omogoča preprostejšo transformacijo na koaksialni kabel z $Z_K=50\,\Omega$.

Kot votli kovinski valovod lahko sicer uporabimo kovinsko cev poljubnega prereza, kar je izpeljal že Lord Rayleigh leta 1897. Elektromagnetni obravnavi najrazličnejših valovodov najrazličnejših prerezov je skupna preprosta vzdolžna koordinata z . Slednja ima mersko enoto meter $[\mathrm{m}]$, preprost Laméjev koeficient $h_z=1$ in konstanten smernik $\vec{1}_z=konst.$

Za rešitev elektromagnetne naloge v dolgi kovinski cevi poljubnega, ampak nespremenljivega prereza zadošča, da rešimo valovni enačbi za električno in magnetno polje v votli notranjosti cevi samo za preprosti skalarni valovni enačbi vzdolžnih komponent:

$$\Delta E_z + k^2 E_z = 0 \quad \text{in} \quad \Delta H_z + k^2 H_z = 0$$

Manjkajoče prečne komponente električnega in magnetnega polja nato izračunamo iz vzdolžnih komponent s pomočjo Maxwellovih enačb, bolj točno s pomočjo Ampèrejevega in Faradayevega zakona v diferencialni obliki. Račun nam dodatno poenostavi iskanje rešitve v obliki napredujočega vala v vzdolžni smeri z, kar pomeni odvisnost $e^{-j\beta z}$ in preprosto odvajanje po vzdolžni koordinati $\partial/\partial z = -j\beta$.

Na primer, votlo kovinsko cev krožnega prereza s polmerom a uporabimo kot valovod. Pripadajočo elektromagnetno nalogo rešujemo v valjnih koordinatah (ρ, ϕ, z). Potujoči val v vzdolžni smeri z opisujeta rešitvi valovnih enačb vzdolžnih komponent:

$$E_z(\rho, \phi, z) = J_m\left(\rho\sqrt{k^2 - \beta^2}\right)\left[A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi\right] e^{-j\beta z}$$

$$H_z(\rho, \phi, z) = J_m\left(\rho\sqrt{k^2 - \beta^2}\right)\left[C_m \cos m\phi + D_m \sin m\phi\right] e^{-j\beta z}$$

Ker v osi votle cevi ne pričakujemo singularnosti, zadošča v obeh rešitvah ena sama Besselova funkcija $J_m\left(\rho\sqrt{k^2 - \beta^2}\right)$. Indeks $m = 0,1,2,3,4,5\ldots$ mora biti celo število. A_m, B_m, C_m in D_m so štiri poljubne konstante, ki določajo jakosti pripadajočih rodov za vsak indeks m.

Manjkajoče štiri prečne komponente v valjnih koordinatah E_ρ, E_ϕ, H_ρ in H_ϕ nato izračunamo iz vzdolžnih komponent E_z in H_z s pomočjo Ampèrejevega in Faradayevega zakona:

Valjne koordinate (ρ,ϕ,z)

Napredujoči val v smeri z: $\frac{\partial}{\partial z}=-j\beta$

$$\vec{E}=\frac{1}{j\omega\epsilon}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}$$

Brez izvorov $\vec{J}=0$

$$\vec{E}=\frac{1}{j\omega\epsilon}\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec{1}_\rho & \rho\vec{1}_\phi & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & -j\beta\\ H_\rho & \rho H_\phi & H_z\end{vmatrix}$$

$$E_\rho=\frac{1}{j\omega\epsilon}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi}+j\beta H_\phi\right] \rightarrow E_\rho-\frac{\beta}{\omega\epsilon}H_\phi=\frac{1}{j\omega\epsilon}\frac{1}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi}$$

$$E_\phi=\frac{1}{j\omega\epsilon}\left[-\frac{\partial H_z}{\partial\rho}-j\beta H_\rho\right] \rightarrow E_\phi+\frac{\beta}{\omega\epsilon}H_\rho=\frac{j}{\omega\epsilon}\frac{\partial H_z}{\partial\rho}$$

$$\vec{H}=\frac{j}{\omega\mu}\,\mathrm{rot}\,\vec{E}$$

$$\vec{H}=\frac{j}{\omega\mu}\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\vec{1}_\rho & \rho\vec{1}_\phi & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\phi} & -j\beta\\ E_\rho & \rho E_\phi & E_z\end{vmatrix}$$

$$H_\rho=\frac{j}{\omega\mu}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi}+j\beta E_\phi\right] \rightarrow H_\rho+\frac{\beta}{\omega\mu}E_\phi=\frac{j}{\omega\mu}\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi}$$

$$H_\phi=\frac{j}{\omega\mu}\left[-\frac{\partial E_z}{\partial\rho}-j\beta E_\rho\right] \rightarrow H_\phi-\frac{\beta}{\omega\mu}E_\rho=\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial E_z}{\partial\rho}$$

$$\omega^2\mu\epsilon=k^2$$

$$E_\rho=\frac{-j}{k^2-\beta^2}\left[\beta\frac{\partial E_z}{\partial\rho}+\frac{\omega\mu}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi}\right] \qquad H_\rho=\frac{-j}{k^2-\beta^2}\left[-\frac{\omega\epsilon}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi}+\beta\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right]$$

$$E_\phi=\frac{-j}{k^2-\beta^2}\left[\frac{\beta}{\rho}\frac{\partial E_z}{\partial\phi}-\omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right] \qquad H_\phi=\frac{-j}{k^2-\beta^2}\left[\omega\epsilon\frac{\partial E_z}{\partial\rho}+\frac{\beta}{\rho}\frac{\partial H_z}{\partial\phi}\right]$$

Prečne komponente polja iz vzdolžnih

Iz vzdolžne komponente magnetnega polja H_z dobimo transverzalno električne rodove TE_{mn} (H_{mn}). Iz vzdolžne komponente električnega polja E_z dobimo transverzalno magnetne rodove TM_{mn} (E_{mn}). V valjnih koordinatah (ρ,ϕ,z) je seveda pomen indeksov drugačen kot v kartezičnih koordinatah (x,y,z) pravokotnega votlovoda! Prvi indeks m šteje hrbte stojnega vala v smeri koordinate ϕ, drugi indeks n pa šteje hrbte stojnega vala v smeri koordinate ρ.

Rodove TE_{mn} in TM_{mn} poiščemo iz prestopnih pogojev. Tangencialna komponenta električne poljske jakosti $\vec{E}_t(\rho=a,\phi,z)=0$ mora biti nič povsod na notranji steni cevi s polmerom $\rho=a$. Rodove TE_{mn} poiščemo iz pogoja, kjer ničlam odvodov ustrezajo maksimumi in minimumi Besselovih funkcij:

$$E_\phi(\rho=a)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{\partial H_z}{\partial\rho}=0 \quad\rightarrow\quad J_m'\left(a\sqrt{k^2-\beta^2}\right)=0$$

Rodove TM_{mn} poiščemo iz pogoja za ničle Besselovih funkcij:

$$E_z(\rho=a)=0 \quad \rightarrow \quad J_m\left(a\sqrt{k^2-\beta^2}\right)=0$$

Najpomembnejši podatek so mejne frekvence ω_{mn} oziroma f_{mn} posameznih rodov, iz katerih lahko izračunamo fazne konstante β_{mn} oziroma valovodne valovne dolžine λ_{gmn} pri poljubni frekvenci.

Rodovi $\mathrm{TE_{mn}}$: $J_m'(k_{mn}a)=0$ ali $J_m'(\frac{\omega_{mn}}{c_0}a)=0$ ali $J_m'(\frac{2\pi f_{mn}}{c_0}a)=0$

Rodovi $\mathrm{TM_{mn}}$: $J_m(k_{mn}a)=0$ ali $J_m(\frac{\omega_{mn}}{c_0}a)=0$ ali $J_m(\frac{2\pi f_{mn}}{c_0}a)=0$

Prva značilna točka Besselovih funkcij je maksimum J_1 oziroma ničla odvoda $J_1'(1.8412)=0$ (glej risbo Besselovih funkcij v poglavju 14. Votlinski rezonator). Osnovni rod v valovodu krožnega prereza je torej $\mathrm{TE_{11}}$ z mejno frekvenco:

$$f_{TE11}=\frac{1.8412\,c_0}{2\pi a}$$

Rod $\mathrm{TE_{11}}$ v valovodu krožnega prereza je dvakrat izrojen, saj neodvisni konstanti C_1 in D_1 dajeta dva neodvisna rodova z enako fazno konstanto β_{TE11} a različno smerjo električnega polja $\vec{E}$ oziroma različno polarizacijo.

Naslednja značilna točka je ničla $J_0(2.4049)=0$, ki ustreza rodu $\mathrm{TM_{01}}$ v valovodu krožnega prereza z mejno frekvenco:

$$f_{TM01}=\frac{2.4049\,c_0}{2\pi a}$$

Rod $\mathrm{TM_{01}}$ v valovodu krožnega prereza ni izrojen, saj je smiselna edino konstanta A_0 . Obstaja ena sama različica rodu $\mathrm{TM_{01}}$ s fazno konstanto β_{TM01} in rotacijsko simetrično sliko elektromagnetnega polja.

Posebnost predstavlja rotacijsko simetrični rod $\mathrm{TE_{01}}$ v valovodu krožnega prereza z mejno frekvenco:

$$f_{TE01}=\frac{3.8318\,c_0}{2\pi a}$$

Za razliko od večine ostalih rodov ima TE_{01} samo jalove tokove $\mathrm{Im}[\vec{K}]$ v steni kovinske cevi. Ker jakost jalovih tokov upada s frekvenco, slabljenje rodu TE_{01} zaradi končno velike prevodnosti stene prav tako upada s frekvenco. Pri zelo visokih frekvencah ima TE_{01} od vseh rodov najnižje slabljenje in z višanjem frekvence gre slabljenje celo proti nič!

Žal ima TE_{01} razmeroma visoko mejno frekvenco, ga je težko vzbuditi in je težko preprečiti sklop z rodovi nižjih redov zaradi majhnih mehanskih odstopanj oblike cevi. Nižjo ali enako mejno frekvenco ima kar sedem različnih rodov: TE_{11} (dvakrat izrojen), TM_{01} , TE_{21} (dvakrat izrojen) in TM_{11} (dvakrat izrojen).

Votlovod krožnega prereza najpogosteje uporabljamo na osnovnem rodu TE_{11} . Obe izrojeni inačici slednjega ustrezata rodovoma TE_{01} in TE_{10} v votlovodu kvadratnega prereza. Izrojenost v votlovodu kvadratnega prereza preprečimo z izbiro različnih stranic $a\neq b$ pravokotnega votlovoda. Izrojenost v votlovodu krožnega prereza preprečimo tako, da krožno cev sploščimo v eliptično cev.

Eliptični valovod omogoča podoben frekvenčni pas enorodovnega delovanja $f_{max}:f_{min}$ kot pravokotni valovod. Eliptični valovod je sicer ugodnejši za vgradnjo, lahko ga polagamo kot debelejši koaksialni kabel. Reševanje valovne enačbe v valjnih eliptičnih koordinatah (u,v,z) je zahtevna matematična naloga.

Večje število valovodnih rodov dobimo tudi takrat, ko si tega ne pričakujemo niti ne želimo. Na primer, koaksialni kabel običajno uporabljamo na osnovnem rodu TEM , ki lahko vodi tudi pri $f=0$ (enosmerno). Pri dovolj visoki frekvenci tudi v koaksialnem kablu nastopijo višji rodovi. Najnižjo mejno frekvenco ima rod TE_{11} , podoben enakovrednemu rodu v krožnem votlovodu.

Koaksialni kabel ni votel. Poleg oklopa, cevi krožnega prereza, vsebuje vsaj še žilo v sredini. Prostor med žilo in oklopom je izpolnjen z dielektrikom $\epsilon_r>1$. Oboje, žila in dielektrik, znižujeta mejno frekvenco prvega višjega rodu TE_{11} . Že majhna ekscentričnost žile povzroči sklop med rodovoma TEM in TE_{11} , kar pomeni zelo visoko slabljenje v bližini mejne

frekvence rodu TE_{11} ter pripadajoče popačenje signala.

Uporaben približek za mejno frekvenco rodu TE_{11} v koaksialnem kablu z žilo polmera a, oklopom notranjega polmera b in dielektrikom ϵ_r med žilo in oklopom, je naslednji:

$$f_{TE11} \approx \frac{c_0/\sqrt{\epsilon_r}}{\pi(a+b)}$$

Približek povsem točno velja v primeru, ko polmer žile $a \rightarrow b$ skoraj doseže polmer oklopa.

Ko postaja žila zelo tanka $a \rightarrow 0$, daje približek nekoliko previsok rezultat v primerjavi s točnim izrazom za rod TE_{11} v cevi krožnega prereza polmera b brez osrednje žile $a=0$, ampak zapolnjene z dielektrikom ϵ_r:

$$f_{TE11} \approx \frac{1.8412\, c_0/\sqrt{\epsilon_r}}{2\pi b} = \left(\frac{1.8412}{2}\right)\frac{c_0/\sqrt{\epsilon_0}}{\pi b}$$

Kot zgled si oglejmo koaksialni kabel UT141, na osnovi katerega so načrtovane vtičnice in vtikači družine »SMA«. Oznaka kabla pomeni premer oklopa $2b = 0.141''(\mathrm{cole}) \approx 3.6\,\mathrm{mm}$. Pri dielektričnosti $\epsilon_r \approx 2$ in karakteristični impedanci $Z_K = 50\,\Omega$ znaša premer žile $2a \approx 1.1\,\mathrm{mm}$. Približek daje mejno frekvenco enorodovnega delovanja $f_{TE11} \approx 28.7\,\mathrm{GHz}$. Delovanje vtičnic in vtikačev družine »SMA« je zato zajamčeno vse do frekvence $f_{MAX} = 26.5\,\mathrm{GHz}$.

Koaksialni kabel in kovinski votlovod sta oba uporabna za prenos visokofrekvenčnih signalov. Pri primerljivem prečnem prerezu vsebujeta podobno količino kovine in imata primerljivo upornost vodnikov na enoto dolžine R/l za osnovni rod valovanja. V grobem približku ima votlovod za en velikostni razred (desetkrat) višjo karakteristično impedanco Z_K od koaksialnega kabla. Posledično je slabljenje votlovoda na enoto dolžine za en velikostni razred (desetkrat) nižje od slabljenja primerljivega koaksialnega kabla na enoto dolžine $\alpha[\mathrm{Np/m}] \approx (R/l)/2Z_K$.

Pri isti prebojni trdnosti dielektrika (plina, praznega prostora) lahko votlovod prenaša za en velikostni razred višjo moč od koaksialnega kabla. Pri prenosu velikih visokofrekvenčnih moči je voltlovod lažje hladiti od izolirane žile v sredini koaksialnega kabla.

Izmere obeh, koaksialnega kabla in votlovoda, so navzgor omejene s pojavom višjih rodov, pripadajočega slabljenja in popačenja signala. Najmanjše standardizirane koaksialne vtičnice in vtikači družine »W« oziroma »1mm« (notranji premer oklopa) dosegajo frekvenčno mejo $f_{MAX}=110\mathrm{GHz}$ za ceno urarske natančnosti ne samo pri izdelavi, pač pa tudi pri vsakodnevnem sestavljanju in razstavljanju. Primerljiva urarska natančnost primernih prirobnic omogoča spajanje pravokotnih kovinskih votlovodov nad $f_{MAX}>1\mathrm{THz}$.

Poleg koaksialnega kabla in votlih kovinskih cevi (votlovodov) uporabljamo še številne druge vrste elektromagnetnih valovodov. Danes so najpomembnejši dielektrični valovodi v obliki svetlobnih vlaken. Delovanje slednjih je podobno kovinskim valovodom.

Svetlobna vlakna izkoriščajo popolni odboj $|\Gamma|=1$ elektromagnetnega valovanja na meji dveh različnih dielektrikov namesto odboja na površini kovine $\Gamma\approx-1$. Računska obravnava dielektričnih valovodov je zahtevnejša, ker se faza popolnega odboja spreminja z vpadnim kotom valovanja.

Pri popolnem odboju elektromagnetno polje prodira tudi v dielektrično oblogo valovoda, ki mora biti zadosti debela, da eksponentno usihanje prepreči izgube zaradi tuneliranja. Praktični dielektrični valovodi so zato omejeni na svetlobne frekvence $f_{MIN}>100\mathrm{THz}$ oziroma $\lambda_0<3\mu\mathrm{m}$.

Valovod iz vrhunskih dielektrikov brez ohmskih izgub kovin omogoča za več velikostnih razredov nižje slabljenje. Zaradi izjemnega pomena v telekomunikacijah je svetlobnim vlaknom dodeljen poseben predmet z imenom »Optične komunikacije«.

V sklopu predmeta »Elektrodinamika« opišemo le osnovna dogajanja v kakršnemkoli valovodu, razjasnimo osnovne pojme kot so fazna hitrost in skupinska hitrost ter postopek reševanja valovne enačbe v kakršnemkoli valovodu okroglega prereza. Vse omenjeno seveda potrebujemo v zahtevnejši obravnavi svetlobnih vlaken.

* * * * *

16. Valovanje v izgubni snovi

Ravninski val oziroma žarek valovanja opisujejo valovne enačbe v prostoru (snovi) brez izvorov, torej brez tokov $\vec{J}(\vec{r})=0$ in brez elektrin $\rho(\vec{r})=0$. V snovi brez izvorov se lahko izognemo potencialom in neposredno rešujemo valovni enačbi za električno polje oziroma magnetno polje:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r})+\omega^2 \mu \epsilon \vec{E}(\vec{r})=0$$

$$\Delta \vec{H}(\vec{r})+\omega^2 \mu \epsilon \vec{H}(\vec{r})=0$$

Pri tem običajno zapišemo konstanto $\omega^2 \mu \epsilon = k^2$ z valovnim številom. V snovi z izgubami tokovi $\vec{J}(\vec{r})\neq 0$ niso enaki nič. Povezavo med gostoto električnega toka in električno poljsko jakostjo $\vec{J}(\vec{r})=\gamma \vec{E}(\vec{r})$ določa specifična prevodnost izgubne snovi.

V splošnem primeru neizotropne in nehomogene izgubne snovi je $\gamma(\vec{r})$ tenzorska funkcija koordinat. Velika večina snovi je izotropnih in homogenih. V slednjih je specifična prevodnost γ preprosta skalarna konstanta. Ampèrejev zakon v takšni preprosti snovi s skalarnima konstantama γ in ϵ lahko zapišemo:

$$\mathrm{rot}\, \vec{H}(\vec{r})=\gamma \vec{E}(\vec{r})+j\omega \epsilon \vec{E}(\vec{r})=j\omega \epsilon_0 \left[\epsilon_r+\frac{\gamma}{j\omega \epsilon_0}\right]\vec{E}(\vec{r})=j\omega \epsilon' \vec{E}(\vec{r})$$

kjer je navidezna dielektričnost $\epsilon'=\epsilon_0\left[\epsilon_r+\frac{\gamma}{j\omega \epsilon_0}\right]$ kompleksno število!
Valovni enačbi za izotropno in homogeno snov z izgubami se tedaj glasita:

$$\Delta \vec{E}(\vec{r})+\omega^2 \mu \epsilon' \vec{E}(\vec{r})=0$$

$$\Delta \vec{H}(\vec{r})+\omega^2 \mu \epsilon' \vec{H}(\vec{r})=0$$

Valovni enačbi lahko načeloma rešujemo na povsem enak način, kot v snovi brez izgub, z edino razliko, da v konstanti $\omega^2 \mu \epsilon' = k^2$ nastopa kompleksno valovno število:

$$k=\omega\sqrt{\mu\epsilon'}=\omega\sqrt{\mu\epsilon_0\left[\epsilon_r+\frac{\gamma}{j\omega\epsilon_0}\right]}$$

$$k=\sqrt{\omega^2\mu\epsilon-j\omega\mu\gamma}=\beta-j\alpha$$

Valovanje v izgubni snovi (tri-dimenzijska naloga) ima kompleksno valovno število $k=\beta-j\alpha$, povsem enako kot vod z izgubami (eno-dimenzijska naloga). Realni del valovnega števila je tudi v tem primeru fazna konstanta $\beta=\mathrm{Re}[k]$ z mersko enoto $\mathrm{rd/m}$ (radiani na meter), ki ima povsem enak fizikalni pomen kot v snovi oziroma vodu brez izgub. Imaginarni del $\alpha=-\mathrm{Im}[k]$ opisuje slabljenje snovi na enoto dolžine v smeri potovanja valovanja v logaritemskih merskih enotah $\mathrm{Np/m}$ (Nepri na meter).

Rešitev valovne enačbe za napredujoči val v izgubni snovi v smeri $\vec{1}_k$ zapišemo s kompleksnim valovnim vektorjem $\vec{k}=\vec{1}_k k=\vec{1}_k(\beta-j\alpha)$:

$$\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}=\vec{E}_0 e^{-j\beta\vec{1}_k\cdot\vec{r}}\, e^{-\alpha\vec{1}_k\cdot\vec{r}}$$

Eksponentna funkcija imaginarnega argumenta $-j\beta\vec{1}_k\cdot\vec{r}$ opisuje zakasnitev faze v smeri potovanja valovanja. Eksponentna funkcija realnega argumenta $-\alpha\vec{1}_k\cdot\vec{r}$ opisuje slabljenje v smeri potovanja valovanja. Vektorska konstanta $\vec{E}_0=\vec{E}(\vec{r}=0)$ ustreza polju v koordinatnem izhodišču in je pravokotna $\vec{E}_0\perp\vec{k}$ na valovni vektor.

Primerjava lastnosti različnih snovi pokaže, da v številnih praktičnih primerih smemo za fazno konstanto $\beta=\mathrm{Re}[k]$ in slabljenje $\alpha=-\mathrm{Im}[k]$ uporabiti približke:

Snov	Baker (kovina) Cu	Morska voda $H_2O+NaCl$	Kremenovo steklo SiO_2
Relativna dielektričnost	$\epsilon_r \approx 1$	$\epsilon_r = 80$	$\epsilon_r = 3.75$
Prevodnost $\gamma[S/m]$	$\gamma = 56 \cdot 10^6 S/m$	$\gamma = 5 S/m$	$\gamma < 10^{-18} S/m$
Mejna frekvenca $\gamma = \omega\epsilon = 2\pi f \epsilon$	$f \approx 10^{18} Hz$ $\lambda \approx 0.3 nm$	$f = 1.125 \cdot 10^9 Hz$ $f = 1.125 GHz$	$f < 4.8 \cdot 10^{-9} Hz$ $T = 1/f > 6.6 let$
Lastnost	Dober prevodnik $\beta \approx \alpha$	Vmesni primer $\beta > \alpha > 0$	Dober izolator $\beta \gg \alpha \rightarrow 0$

Vse kovine so dobri prevodniki. Mejna frekvenca, kjer je prevodni tok $|\vec{J}(\vec{r})| \approx |\partial \vec{D}(\vec{r})/\partial t|$ istega velikostnega razreda kot premikalni tok, je v področju trdih rentgenskih žarkov oziroma »gama« žarkov. Pri nižjih frekvencah je premikalni tok v kovinah običajno zanemarljiv: $|\partial \vec{D}(\vec{r})/\partial t| \ll |\vec{J}(\vec{r})|$ oziroma $\gamma \gg \omega\epsilon$ oziroma $\omega\mu\gamma \gg \omega^2\mu\epsilon$. Relativne dielektričnosti kovine ϵ_r sploh ne moremo določiti. Člen $\omega^2\mu\epsilon$ smemo tedaj zanemariti v izračunu fazne konstante in slabljenja:

$$k = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - j\omega\mu\gamma} \approx \sqrt{-j\omega\mu\gamma} = \frac{1-j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\gamma}$$

$$\beta \approx \alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\gamma}{2}}$$

V dielektrikih je prevodni tok $|\vec{J}(\vec{r})| \ll |\partial \vec{D}(\vec{r})/\partial t|$ običajno dosti manjši od premikalnega toka, kar pomeni $\gamma \ll \omega\epsilon$ oziroma $\omega\mu\gamma \ll \omega^2\mu\epsilon$. V dobrih dielektrikih je perioda $T = 1/f$ oziroma obratna vrednost mejne frekvence v velikostnem razredu od nekaj dni do nekaj let. V dobrem dielektriku smemo izračun fazne konstante in slabljenja poenostaviti v:

$$k = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - j\omega\mu\gamma} = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon\left[1 - \frac{j\gamma}{\omega\epsilon}\right]} \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1 - j\frac{\gamma}{2\omega\epsilon}\right]$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon} \qquad \alpha \approx \frac{\gamma}{2\omega\epsilon}\beta = \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ll \beta$$

Za vmesni primer, ko sta prevodni in premikalni tok v istem velikostnem

razredu in velja $\gamma \approx \omega \epsilon$, ni nobenih približkov. Izračunati moramo kvadratni koren kompleksnega števila:

$$\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - j \omega \mu \gamma} = \beta - j \alpha$$

$$\omega^2 \mu \epsilon - j \omega \mu \gamma = \beta^2 - \alpha^2 - j2 \alpha \beta$$

$$\omega^2 \mu \epsilon = \beta^2 - \alpha^2 \qquad \omega \mu \gamma = 2 \alpha \beta$$

$$\omega^2 \mu \epsilon = \beta^2 - \left(\frac{\omega \mu \gamma}{2 \beta} \right)^2 \qquad \leftarrow \qquad \alpha = \frac{\omega \mu \gamma}{2 \beta}$$

$$\beta^4 - \omega^2 \mu \epsilon \beta^2 - \omega^2 \mu^2 \gamma^2 / 4 = 0$$

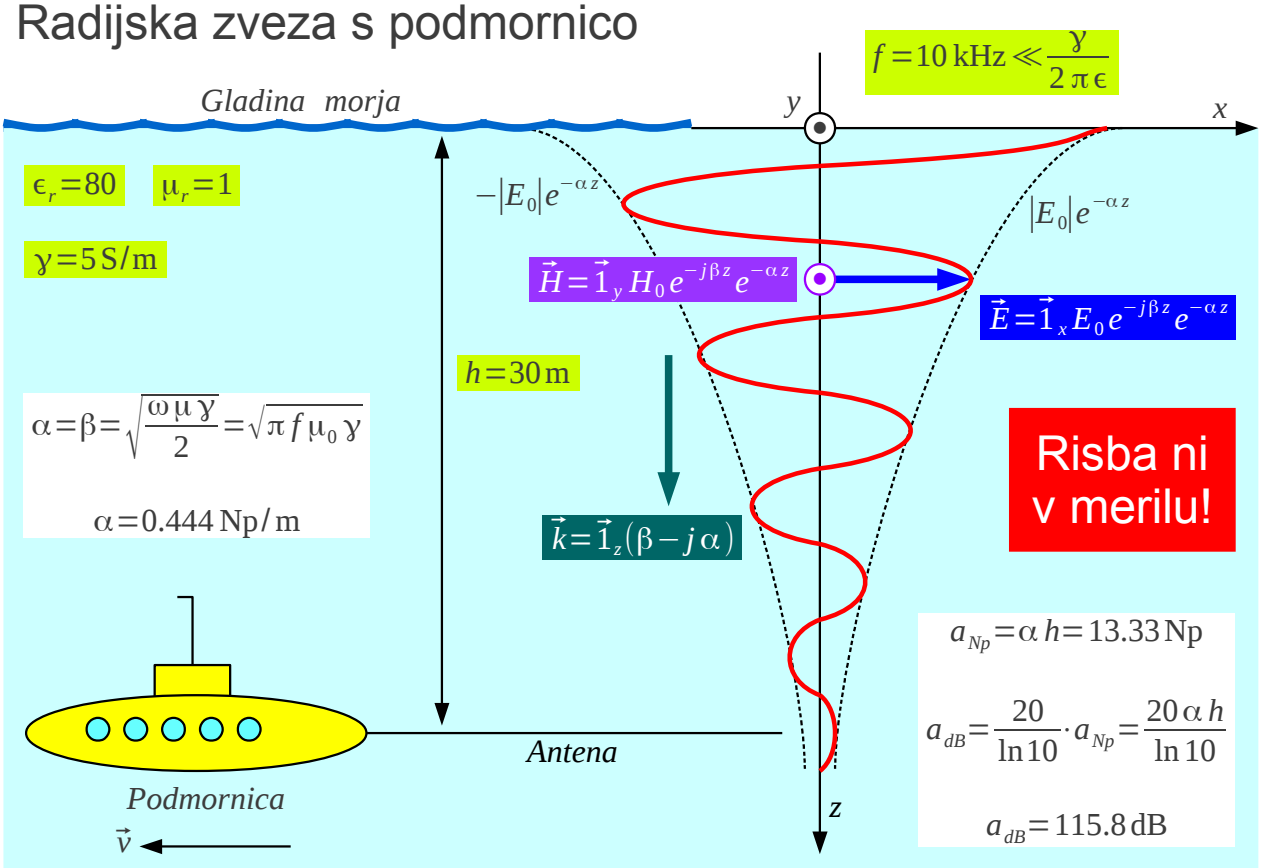
$$\beta = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 \mu \epsilon \pm \sqrt{\omega^4 \mu^2 \epsilon^2 + \omega^2 \mu^2 \gamma^2}}{2}}$$

Pri obeh kvadratnih korenih izberemo pozitivni predznak. Notranji koren ustreza absolutni vrednosti $|k|$ kompleksnega valovnega števila. Pozitivni predznak notranjega korena daje realni konstanti β in α . Negativni predznak bi dal povsem imaginarna β in α . Takšna rešitev je sicer povsem pravilna, a sta v njej vlogi fazne konstante in konstante slabljenja ravno zamenjani med sabo glede na dogovor.

Pozitivni predznak zunanjega korena daje fazno konstanto β napredujočega vala. Negativni predznak zunanjega korena bi dal fazno konstanto β odbitega vala. Slabljenje α določimo iz izračunane fazne konstante. Strogo vedno velja $\beta > \alpha > 0$.

Na srečo tak kompliciran izračun običajno ni potreben niti v primeru morske vode. Kot zgled si oglejmo dodatno slabljenje, ki ga vnaša morska voda pri radijski zvezi s podmornico. Frekvenca zveze je tako nizka, da se morska voda obnaša kot dober prevodnik:

Radijska zveza s podmornico



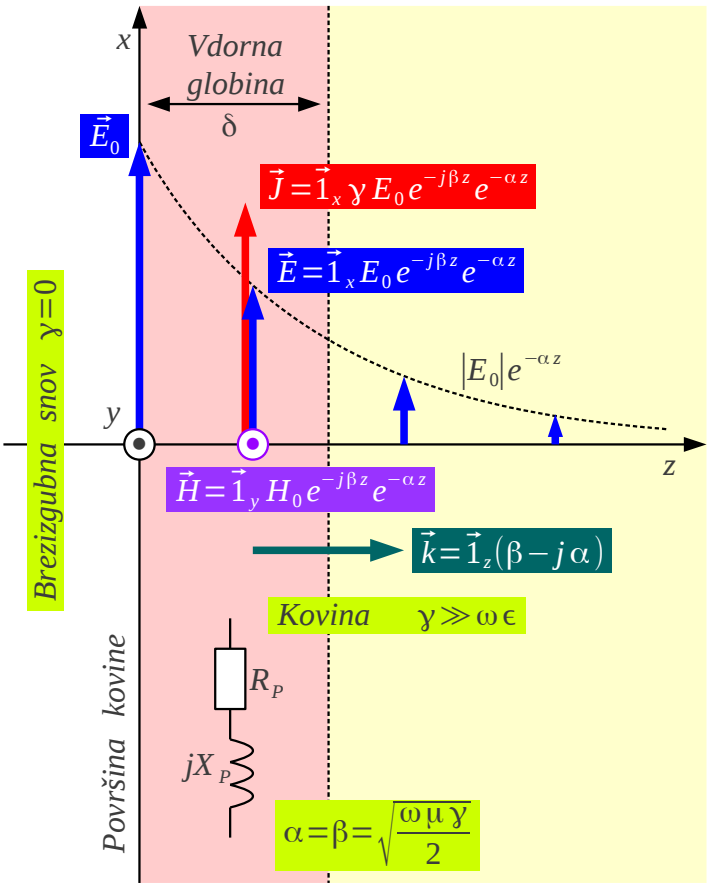
Ker je slabljenje morske vode zelo veliko, radijske zveze s podmornicami uporabljajo zelo nizke frekvence $f=10\,\mathrm{kHz}$ in manj. Antena je vodoravna žica, ki jo podmornica vleče za sabo. Zaradi visoke dielektrične konstante $\epsilon_r \gg 1$ in visokega lomnega količnika morske vode $n=\sqrt{\epsilon_r}$ v področju radijskih valov, se radijsko valovanje na gladini lomi skoraj navpično $\Theta_L \rightarrow 0$ v globino. Kljub nizki frekvenci $f=10\,\mathrm{kHz}$ znaša dodatno slabljenje morske vode kar $a_{dB}=115.8\,\mathrm{dB}$ do globine komaj $h=30\,\mathrm{m}$!

Pozor, slabljenje valovanja na sliki ni narisano v merilu! Fazna konstanta β je namenoma narisana približno dvakrat večja, slabljenje α pa dosti manjše kot iz izračuna. Risba torej velja za primer $\beta \gg \alpha$. V resničnem opisanem primeru zveze s podmornico $\beta \approx \alpha$ bi bila faza valovanja komaj vidna pod hitro usihajočo eksponentno krivuljo!

Dosti bolj pomemben primer od radijske zveze s podmornico je vdor elektromagnetnega valovanja v kovino. Električno polje poganja v kovini tok $\vec{J}(\vec{r})=\gamma\vec{E}(\vec{r})$. Kjer ni električnega polja, tudi ni toka. V kovinah je slabljenje α zelo visoko. Sredi kosa kovine skoraj ni toka.

Izmenično električno polje lahko vzbudimo kvečjemu blizu površine kovine z nekim zunanjim virom. Izmenični tokovi zato obstajajo samo tik pod

površino kovin. Opisani pojav izriva izmeničnega električnega toka proti površini kovine imenujemo kožni pojav (angleško skin effect):



$$\delta=\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}} \equiv \text{Vdorna globina}$$

$$\vec{K}=\int_0^\infty \vec{J}(\vec{r})\,dz \equiv \text{Ploskovni tok}$$

$$\vec{K}=\int_0^\infty \vec{1}_x \gamma E_0 e^{(-j\beta-\alpha)z}\,dz=\vec{1}_x \frac{\gamma}{j\beta+\alpha} E_0$$

$$\vec{E}_0=Z_P \vec{K}$$

$$Z_P=\frac{E_0}{|\vec{K}|}=\frac{\alpha+j\beta}{\gamma} \equiv \text{Impedanca plasti}$$

$$Z_P=R_P+jX_P$$

$$R_P=\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{1}{\delta\gamma}=\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}} \equiv \text{Upornost plasti}$$

$$X_P=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{1}{\delta\gamma}=\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}=\omega L_P$$

Kožni pojav v kovini

Pod površino kovine polje in tok eksponentno upadata. Debelino kože (angleško skin depth) oziroma vdorno globino (angleško penetration depth) definiramo kot $\delta=1/\alpha=\sqrt{2/\omega\mu\gamma}$ obratno vrednost slabljenja. Na globini, ki ustreza debelini kože, tedaj polje in tok upadeta na $1/e \approx 0.368$ začetne vrednosti na površini kovine.

Ko je debelina kože δ majhna, je smiselno seštevanje (integracija) prostorske gostote toka $\vec{J}(\vec{r})$ po globini z v skupen ploskovni tok $\vec{K}$ v tanki plasti. Integracija daje popolnoma enak rezultat za $\vec{K}$, kot bi ga dobili s konstantnim poljem $\vec{E}_0$ v tanki plasti debeline δ.

Tanki plasti lahko pripišemo impedanco plasti Z_P (impedanca kvadratka). Impedanca plasti $Z_P=R_P+jX_P$ ima realno (delovno) in imaginarno (jalovo) komponento. Realna komponenta R_P je upornost tanke plasti (upornost kvadratka). Imaginarna komponenta $X_P=\omega L_P$ določa notranjo induktivnost tanke plasti.

Kot praktičen zgled si oglejmo vdorno globino δ in plastno upornost R_P običajnih prevodnikov (baker Cu) in feromagnetikov (železo Fe):

Kovina	Baker Cu $\gamma \approx 56 \cdot 10^6 \mathrm{S/m}$ $\mu_r \approx 1$		Železo Fe $\gamma \approx 8 \cdot 10^6 \mathrm{S/m}$ $\mu_r \approx 10^4$	
Frekvenca f	Vdorna globina δ	Upornost plasti R_P	Vdorna globina δ	Upornost plasti R_P
$1\,\mathrm{Hz}$	$67.3\,\mathrm{mm}$	$0.266\,\mu\Omega$	$1.78\,\mathrm{mm}$	$70.3\,\mu\Omega$
$100\,\mathrm{Hz}$	$6.73\,\mathrm{mm}$	$2.66\,\mu\Omega$	$0.178\,\mathrm{mm}$	$703\,\mu\Omega$
$10\,\mathrm{kHz}$	$0.673\,\mathrm{mm}$	$26.6\,\mu\Omega$	$17.8\,\mu\mathrm{m}$	$7.03\,\mathrm{m}\Omega$
$1\,\mathrm{MHz}$	$67.3\,\mu\mathrm{m}$	$266\,\mu\Omega$	$1.78\,\mu\mathrm{m}$	$70.3\,\mathrm{m}\Omega$
$100\,\mathrm{MHz}$	$6.73\,\mu\mathrm{m}$	$2.66\,\mathrm{m}\Omega$	$0.178\,\mu\mathrm{m}$	$703\,\mathrm{m}\Omega$
$10\,\mathrm{GHz}$	$0.673\,\mu\mathrm{m}$	$26.6\,\mathrm{m}\Omega$	$17.8\,\mathrm{nm}$	$7.03\,\Omega$
$1\,\mathrm{THz}$	$67.3\,\mathrm{nm}$	$266\,\mathrm{m}\Omega$	$1.78\,\mathrm{nm}$	$70.3\,\Omega$
$100\,\mathrm{THz}$	$6.73\,\mathrm{nm}?$	$2.66\,\Omega?$	$0.178\,\mathrm{nm}?$	$703\,\Omega?$

Vdorna globina v baker Cu in druge dobre prevodnike (srebro Ag, aluminij Al, zlato Au) ni zanemarljiva niti pri omrežni frekvenci $f = 50\,\mathrm{Hz}$, kjer znaša približno centimeter. Namesto debelejših polnih vodnikov se celo v energetiki uporabljajo bakrene cevi, saj v sredini cevi debelega polnega vodnika itak ne bi bilo toka.

V področju radijskih frekvenc okoli $f = 100\,\mathrm{MHz}$ znaša vdorna globina δ v baker komaj nekaj mikrometrov. V večjem delu preseka vodnika sploh ni nobenega toka. Upornost vodnikov tedaj narašča sorazmerno s korenom frekvence. Izgube koaksialnega kabla in drugih TEM vodov prav tako naraščajo sorazmerno s korenom frekvence.

Hkrati se notranja induktivnost vodnikov $L_P = X_P/\omega = \sqrt{\mu/2\omega\gamma}$ zmanjšuje obratno sorazmerno korenu frekvence. Na frekvencah nad $f > 1\,\mathrm{MHz}$ postane notranja induktivnost vodnikov zanemarljivo majhna v primerjavi z induktivnostjo prostora (snovi) med vodniki.

Pri svetlobnih frekvencah nad $f > 100\,\mathrm{THz}$ prevodnost γ in permeabilnost μ kovin že močno odstopata od vrednosti pri nizkih frekvencah. Prevodnost bakra in drugih kovin začne upadati. Izračunane vrednosti v tabeli so vprašljive? Kovinska zrcala so v optiki slaba zrcala, od njih se odbije le del vpadne svetlobe.

Ko hrapavost površine vodnika $\Delta h > \delta$ presega vdorno globino, se pot toka znatno podaljša. Povečanje izgub zaradi hrapavosti površine kovin opazimo že na mikrovalovnih frekvencah nad $f > 1\,\mathrm{GHz}$. Mikrovalovna vezja zato zahtevajo zrcalno gladke površine vodnikov.

Prevodnost γ in permeabilnost μ železa Fe sta močno odvisni od sestavin zlitine in obdelave. Povrhu je permeabilnost μ odvisna od frekvence. Tabela je izračunana za relativno permeabilnost $\mu_r \approx 10000 = 10^4$ in prevodnost, ki je sedemkrat manjša $\gamma_{Fe} \approx \gamma_{Cu}/7$ od prevodnosti bakra. V tem primeru je vdorna globina δ v železo $\sqrt{10^4/7} \approx 38$ -krat manjša od vdorne globine v baker, plastna upornost R_P železa pa $\sqrt{10^4 \cdot 7} \approx 265$ -krat višja od plastne upornosti bakra.

Zaradi tanke vdorne globine δ in visoke plastne upornosti R_P vnašajo železni vodniki velike izgube že pri omrežni frekvenci $f = 50\,\mathrm{Hz}$. Še višje izgube železa omogočajo delovanje indukcijskega kuhalnika pri frekvenci okoli $f \approx 25\,\mathrm{kHz}$. Goli železni vodniki so povsem neuporabni za telekomunikacijske vode, tuljave, rezonatorje in antene.

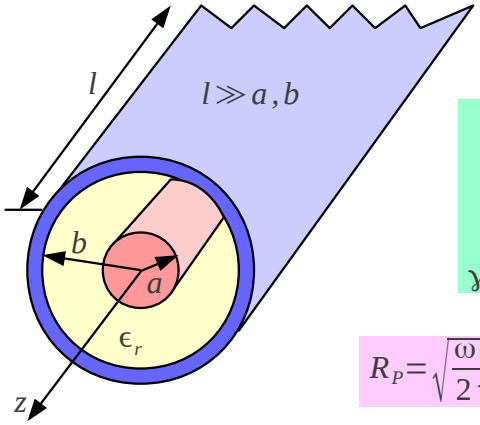
Drobci železa Fe so osnovna sestavina mikrovalovnih absorberjev (dušilcev valovanja). Slednji imajo podobno valovno impedanco $Z = \sqrt{\mu'/\epsilon'} \approx Z_0$ kot prazen prostor in hkrati zelo velike izgube. Mikrovalovne absorberje uporabljamo za dušenje neželjenih rezonanc votlin znotraj kovinskih (oklopljenih) ohišij elektronskih vezij za zelo visoke frekvence vse do gradnikov in zunanjih premazov radarsko-nevidnih letal.

Železne vodnike pogosto prevlečemo s tanko plastjo dobrega prevodnika (pobakrimo, posrebrimo). Zadošča prevleka dobrega prevodnika debeline komaj nekaj vdornih globin δ , torej v velikostnem razredu nekaj deset mikrometrov. V isti napravi tedaj združimo mehansko trdnost železne sredice (brez električnega toka) in odlične električne lastnosti tanke kože srebra Ag ali drugega dobrega prevodnika.

Zanimiva naloga v telekomunikacijah je izračun slabljenja prenosnega voda. V vodih s kovinskimi vodniki (koaksialni kabel, kovinski votlovod) je glavni izvor izgub končna prevodnost kovin. Kožni pojav še dodatno povečuje izgube v vodnikih. V primerjavi z izgubami v vodnikih so v istem prenosnem vodu izgube kakovostnega dielektrika zanemarljivo majhne.

Kot zgled si oglejmo koaksialni kabel za medkrajevno povezavo zmogljivosti $C = 140\,\mathrm{Mbit/s}$:

Slabljenje koaksialnega kabla



$$a=2\,\mathrm{mm}$$
$$b=7\,\mathrm{mm}$$
$$\epsilon_r=2.2$$
$$f=100\,\mathrm{MHz}$$
$$\gamma=56\cdot 10^6\,\mathrm{S/m}$$

$$\delta=\sqrt{\frac{2}{\omega\mu\gamma}}\approx 6.73\,\mu\mathrm{m}\ll a,b$$

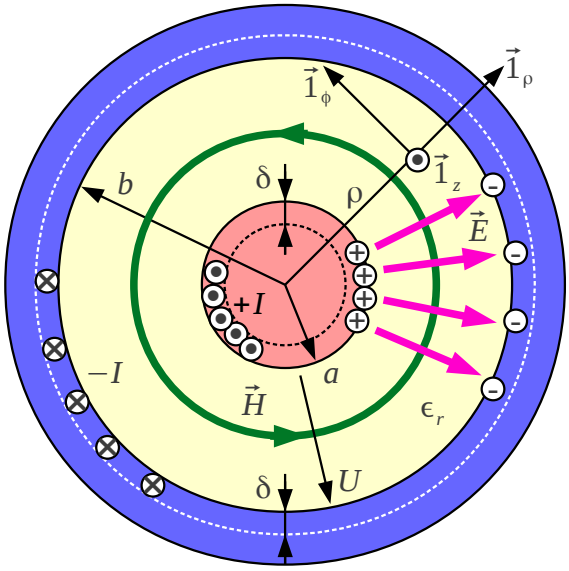
$$R_P=\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\gamma}}\approx 2.66\,\mathrm{m}\Omega$$

$$R/l=\frac{R_P}{2\pi a}+\frac{R_P}{2\pi b}=\frac{R_P}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\approx 0.272\,\Omega/\mathrm{m}$$

$$Z_K=\frac{Z_0}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\approx\frac{60\,\Omega}{\sqrt{\epsilon_r}}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\approx 50.7\,\Omega$$

$$\alpha=\frac{R/l}{2Z_K}\approx 2.68\cdot 10^{-3}\,\mathrm{Np/m}$$

$$a_{dB}/l=\frac{20}{\ln 10}\cdot\alpha\approx 0.0233\,\mathrm{dB/m}=23.3\,\mathrm{dB/km}$$



Pri navedeni frekvenci $f=100\,\mathrm{MHz}$ je vdorna globina $\delta\approx 6.73\,\mu\mathrm{m}\ll a,b$ dosti manjša od prečnih izmer kabla. Električni tok obstaja samo v tanki koži na površini žile ter v tanki koži na notranji površini oklopa. Žila in oklop sta iz bakra z upornostjo plasti $R_P\approx 2.66\,\mathrm{m}\Omega$ pri navedeni frekvenci $f=100\,\mathrm{MHz}$.

Upornost tanke kože na površini žile na enoto dolžine znaša $R_{žile}/l=R_P/2\pi a$. Upornost tanke kože na notranji površini oklopa na enoto dolžine znaša $R_{oklopa}/l=R_P/2\pi b$. Skupno upornost izgub na enoto dolžine izračunamo $R/l=R_{žile}/l+R_{oklopa}/l\approx 0.272\,\Omega/\mathrm{m}$.

Strogo gledano elektromagnetno polje v koaksialnem kablu z od nič različno upornostjo vodnikov $R_{žile}>0$ in $R_{oklopa}>0$ ne more biti TEM . Električno polje ima majhno vzdolžno komponento E_z , ki poganja električni tok v žili in v oklopu. V primerjavi s prečno komponento $E_\rho\gg E_z$ je vzdolžna komponenta tako majhna, da smemo izračunati karakteristično impedanco (upornost) koaksialnega kabla kot v poglavju »2. Telegrafska enačba« za zanemarljivo majhno notranjo impedanco vodnikov. Podatki iz zgleda dajejo $Z_K\approx 50.7\,\Omega$.

Izračun slabljenja prenosnega voda zaradi končne prevodnosti vodnikov (od nič različne upornosti vodnikov) je bil izpeljan v poglavju »5. Smithov diagram« kot približek $\alpha \approx (R/l)/2Z_K$. Približek daje slabljenje $\alpha \approx 0.268 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Np/m}$ na enoto dolžine opisanega medkrajevnega kabla.

V opisani nalogi je smiselno, da izračunano slabljenje pretvorimo iz Neprov na meter v decibele na kilometer in dobimo $a_{dB}/l \approx 23.3\,\mathrm{dB/km}$. Medkrajevni koaksialni kabel torej potrebuje ojačevalnike oziroma regeneratorje na medsebojni razdalji približno $l \approx 2\,\mathrm{km}$. Notranjemu premeru kabla $2b = 14\,\mathrm{mm}$ moramo dodati še debelino oklopa in zunanjo zaščito, kar pomeni, da takšen kabel ni poceni. Številni ojačevalniki oziroma regeneratorji so še dražji.

Izračunano slabljenje $a_{dB}/l \approx 23.3\,\mathrm{dB/km}$ izhaja iz omejitev snovi, vodnikov iz bakra Cu , iz katerih je kabel izdelan. Posrebreni (Ag) vodniki znižujejo slabljenje za komaj pet odstotkov! Brez superprevodnikov torej ne moremo izdelati kaj bistveno boljšega koaksialnega kabla. Prava rešitev za medkrajevno zvezo je vod, ki ne uporablja kovin. Sodobno svetlobno vlakno iz kremenovega stekla $\mathrm{SiO_2}$ hkrati omogoča več kot stokrat manjše slabljenje $a_{dB}/l \approx 0.2\,\mathrm{dB/km}$, bistveno večjo pasovno širino in več kot stokrat manjše prečne izmere.

Čeprav koaksialni kabel danes ni več najprimernejši za medkrajevni vod, je še vedno zelo uporabna naprava na krajših razdaljah. Kaj vse vpliva na slabljenje koaksialnega kabla z dobrim dielektrikom in končno prevodnostjo vodnikov, ugotovimo tako, da vse izpeljave združimo v en sam izraz za slabljenje kabla:

$$\alpha = \frac{R_P \sqrt{\epsilon_r}}{2 Z_0 b} \left[\frac{(b/a)+1}{\ln(b/a)} \right]$$

Plastna upornost $R_P = \sqrt{\omega \mu / 2\gamma}$ je sorazmerna korenu frekvence ter vsebuje lastnost snovi vodnikov. Dober dielektrik sicer sam po sebi ne vnaša izgub, pač pa znižuje karakteristično impedanco kabla Z_K . Višjo Z_K in posledično nižje slabljenje daje dielektrik z nižjim ϵ_r . Koaksialni kabli z nizkim slabljenjem v ta namen uporabljajo penast dielektrik oziroma distančnike za mehansko podporo srednje žile.

Valovna impedanca praznega prostora $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ je fizikalna konstanta, ki je ne moremo spreminjati. Polmer oklopa b določa zunanje

izmere in ceno kabla. V skrajnem primeru prevelik b omogoči razširjanje višjega valovodnega rodu TE_{11} poleg osnovnega rodu TEM, kar predstavlja strogo gornjo frekvenčno mejo koaksialnega kabla.

Načrtovalcu koaksialnega kabla preostane izbira razmerja $x=b/a$ med polmerom oklopa in polmerom žile. Povsem jasno je sredica žile visokofrekvenčnega koaksialnega kabla lahko votla oziroma zapolnjena z mehanskim nosilcem (železom). Poleg karakteristične impedance kabla isto razmerje $x=b/a$ določa tudi slabljenje kabla. V izrazu za slabljenje to razmerje nastopa v obliki:

$$f(x)=\frac{x+1}{\ln x}$$

Transcendentna funkcija $f(x)\rightarrow\infty$ gre proti neskončnosti, ko gre argument $x\rightarrow 1$ oziroma $x\rightarrow\infty$. Vmes doseže transcendentna funkcija dokaj plitev minimum pri $x\approx 3.591121\approx 3.6$. Izbira razmerja polmer oklopa proti polmeru žile $b/a\approx 3.6$ daje koaksialni kabel z najnižjim slabljenjem.

Koaksialni kabel z razmerjem $b/a\approx 3.6$ in praznim prostorom (zrakom) kot dielektrikom dosega karakteristično impedanco $Z_K\approx 76.8\,\Omega$. Najbolj običajen dielektrik koaksialnega kabla je polietilen z relativno dielektričnostjo $\epsilon_r\approx 2.25$. Pri optimalnem razmerju $b/a\approx 3.6$ daje polietilenska izolacija koaksialni kabel s karakteristično impedanco $Z_K\approx 51.2\,\Omega$.

Koaksialni kabli, pripadajoče vtičnice in merilni inštrumenti so danes večinoma izdelani za karakteristično impedanco $Z_K=50\,\Omega$. Koaksialni kabli s penastim dielektrikom omogočajo malenkost nižje slabljenje okoli $Z_K\approx 60\,\Omega$. Kabli in vtičnice za kabelsko televizijo so zato običajno izdelani za karakteristično impedanco $Z_K=60\,\Omega$. Končno se koaksialni kabli, pripadajoče vtičnice in merilna oprema izdelujejo tudi za karakteristično impedanco $Z_K=75\,\Omega$.

Koaksialni kabel predstavlja preprost, elektromagnetno zaključen vod z zanemarljivo majhnim zunanjim poljem. Oklop koaksialnega kabla omogoča zares majhen presluh do drugih elektromagnetnih naprav v okolici. Žal koaksialni kabel ne omogoča najnižjega slabljenja.

Če isto količino bakra oblikujemo v simetrični dvovod (parica), naraste upornost izgub R/l za manj kot dvakrat ob hkratnem prirastku

karakteristične impedance Z_K za faktor trikrat do desetkrat v primerjavi s koaksialnim kablom. Računalniške povezave (Ethernet) uporabljajo kable s štirimi neoklopljenimi paricami UTP (Unshielded Twisted Pair). Presluh med sosednjimi paricami v istem kablu znižuje skrbna izbira periode prepletanja paric, ki je za vsako od štirih paric v kablu drugačna.

Karakteristično impedanco voda Z_K lahko zvišamo tudi tako, da v vod periodično vstavljamo dodatne zaporedne koncentrirane tuljave. Čeprav je postopek že leta 1893 objavil Oliver Heaviside, sta danes bolj znana Mihajlo Pupin in njegov patent iz leta 1899. Pupinove tuljave, vstavljene približno vsake dva kilometra, so sicer razpolovile slabljenje telefonskega voda in podvojile domet telefonske zveze brez ojačevalnikov. Vod s periodičnimi koncentriranimi tuljavami se žal obnaša kot nizkoprepustno frekvenčno sito. Pasovna širina voda s Pupinovimi tuljavami je manjša, zato se Pupinove tuljave danes ne uporabljajo več.

Povečana upornost vodnikov zaradi kožnega pojava omejuje tudi električne lastnosti drugih naprav. Kovinska žica krožnega prereza s polmerom $r \gg \delta$ ima precej višjo upornost za visokofrekvenčni izmenični tok kot pa za enosmerni tok:

$$R_{\sim} = \frac{l}{\gamma A_{\sim}} = \frac{l}{\gamma 2\pi r \delta} \gg R_{=} = \frac{l}{\gamma A_{=}} = \frac{l}{\gamma \pi r^2}$$

Kvaliteta tuljave iz bakrene žice krožnega prereza in neferomagnetnim (zračnim) jedrom običajno ne preseže vrednosti $Q = \omega L / R < 100$ v področju radijskih frekvenc. Nekoliko manjše izgube in višjo kvaliteto omogoča visokofrekvenčna pletenica, sestavljena iz večjega števila med sabo izoliranih in prepletenih tankih bakrenih žic. Slednje dajejo ob nespremenjenem preseku bakra večji skupni obseg vodnika, kjer se električni tok enakomerno porazdeli po koži vseh malih žičk.

Višjo kvaliteto električnega rezonatorja dosežemo v votlinskem rezonatorju. Tudi kvaliteto električnega votlinskega rezonatorja $Q = \omega W_{shranjena} / P_{izgub}$ omejujejo izgube električnih tokov v stenah rezonatorja in pripadajoči kožni pojav. Kovinska votlina iz dobrega prevodnika z gladkimi stenami dosega $Q \approx 10^4$ na osnovnem rodu v frekvenčnem pasu okoli $f \approx 3\,\mathrm{GHz}$.

Eksponentno usihajoče elektromagnetno polje dobimo tudi pri popolnem odboju na meji dveh brezizgubnih snovi, bolj točno v redkejši snovi, kot je to opisano v poglavju »13. Ravninski val«. Sam fizikalni pojav je pri popolnem odboju bistveno drugačen od valovanja v snovi z izgubami! V snovi

brez izgub je valovna impedanca $Z=|(\vec{E})|/|(\vec{H})|=\sqrt{\mu/\epsilon}$ povsem realna. Pretok delovne moči $\mathrm{Re}[\mathrm{div}(\vec{S})]=0$ nima niti izvorov niti ponorov. Električna energija se torej ohranja.

V snovi z izgubami je valovna impedanca $Z=|(\vec{E})|/|(\vec{H})|=\sqrt{\mu'/\epsilon'}$ kompleksno število, kjer izgube opisujeta kompleksna permeabilnost μ' oziroma kompleksna dielektričnost ϵ' . Pretok delovne moči $\mathrm{Re}[\mathrm{div}(\vec{S})]<0$ ima ponore! Izgube pretvarjajo električno energijo v toploto. Električna energija se torej NE ohranja.

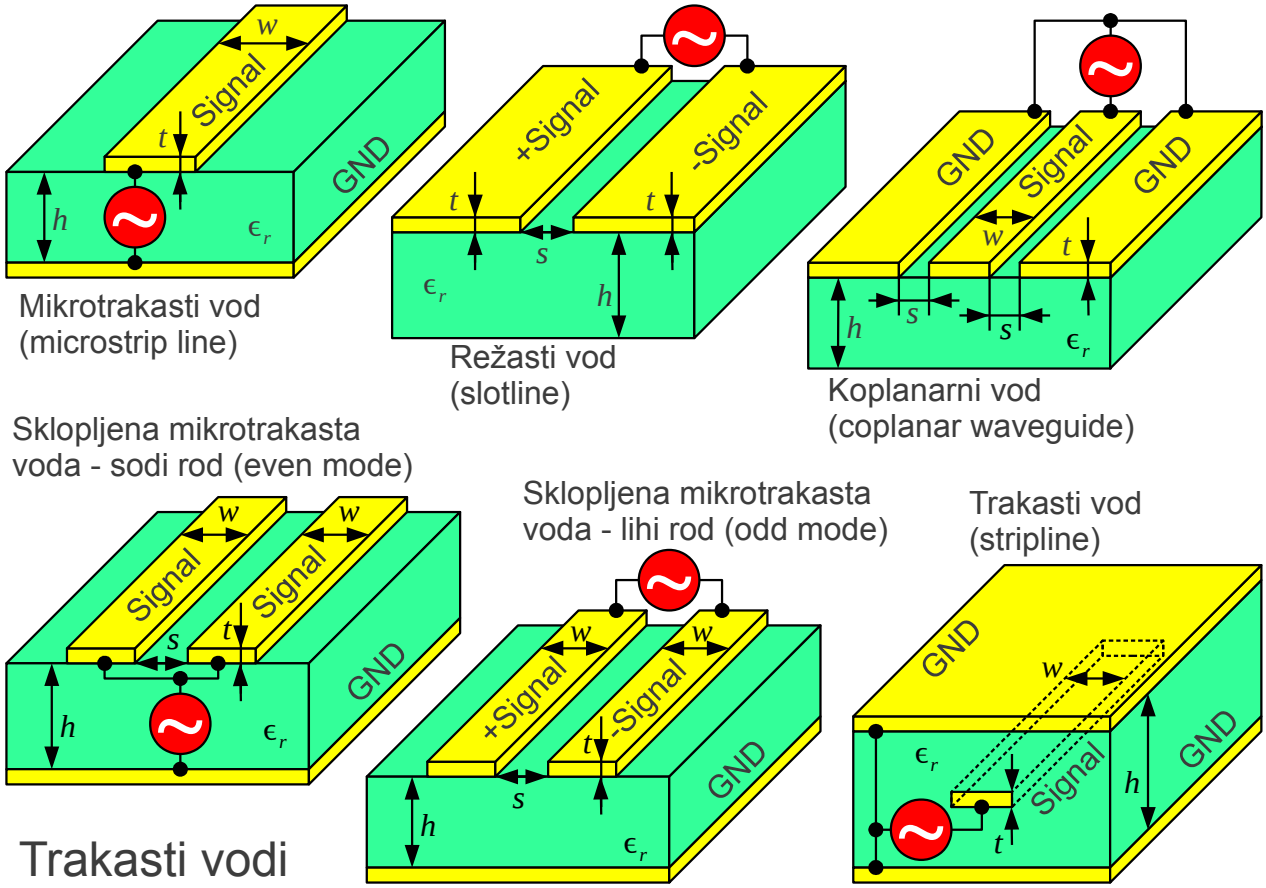
V telekomunikacijah izkoriščamo oba opisana, med sabo zelo različna naravna pojava, za isti namen: vodenje valovanja. Valovanje v izgubni snovi je natančen elektromagnetni opis kovinskih vodnikov. Slabljenje koaksialnega kabla, parice, kovinskega votlovoda in drugih kovinskih valovodov je povsem določeno z naravnimi lastnostmi kovinskih vodnikov. Popolni odboj valovanja je natančen elektromagnetni opis pojava na meji dveh različnih brezizgubnih snovi. Ker znamo izdelati različne zelo dobre dielektrike, je slabljenje svetlobnega vlakna lahko izredno majhno.

* * * * *

17. Trakasti vodi

Čeprav kovinski trak ni najprimernejša oblika vodnika s stališča elektromagnetnega polja in pripadajočih pojavov, so trakasti vodniki zelo priljubljeni zaradi preproste izdelave. Ploščato žico je lažje navijati od žice okroglega prereza. Ploščate vodnike lahko preprosto izdelamo iz pločevine. Postopki fotolitografije narekujejo električne povezave v monolitnih integriranih vezjih prav tako v obliki trakov.

Daleč najpogostejša oblika trakastih vodnikov v elektroniki in telekomunikacijah so tiskana vezja najrazličnejših izvedb: preprosta enostranska, zahtevnejša dvostranska in najzahtevnejša večslojna tiskana vezja. Na istem tiskanem vezju lahko uporabljamo več različnih oblik trakastih vodov oziroma valovodov. Nabor niti zdaleč ni omejen na nekaj najpogostejših zvrsti, ki so prikazane na spodnji sliki:



Kjer je na istem tiskanem vezju prisotnih več različnih signalov na pripadajočih vodih in so medsebojni sklopi (presluhi) nezaželjeni, se najpogosteje uporabljajo mikrotrakasti vodi. Mikrotrakasti vod (angleško: microstrip line) zahteva dvostransko ali večslojno tiskano vezje. Ena stran

dvostranskega vezja oziroma en sloj večslojnega vezja ni jedkan in deluje kot skupna referenčna ravnina (masa, ground ali GND) za vsa prisotna vezja. Signalni vodniki na drugi strani dvostranskega vezja zaključujejo večino svojega elektromagnetnega polja na opisano referenčno ravnino.

Mikrotrakasti vod je popolnoma opisan s štirimi podatki: debelino podlage h, njeno relativno dielektričnostjo $\epsilon_r \geq 1$, širino vodnika w in debelino vodnika t. Debelina podlage se giblje med $h = 1.6\,\mathrm{mm}$ pri preprostih dvostranskih tiskanih vezjih vse do manj kot $h < 0.1\,\mathrm{mm}$ v večslojnih vezjih. Relativna dielektričnost vitroplasta se giblje okoli $\epsilon_r \approx 4.4$ in je frekvenčno odvisna, dielektričnost teflonskih laminatov pa okoli $\epsilon_r \approx 2.3$. Elektromagnetno polje mikrotrakastega voda sicer sega tudi v prazen polprostor (zrak) nad tiskanim vezjem, kjer velja $\epsilon = \epsilon_0$ in $\mu = \mu_0$.

Debelina vodnika t ustreza debelini bakrene folije, ki je prilepljena na laminat. Debelina $t = 35\,\mu\mathrm{m}$ ustreza eni unči $(1\,\mathrm{oz} = 28.35\,\mathrm{g})$ bakra na kvadraten čevelj $(1\,\mathrm{ft} = 0.3048\,\mathrm{m})$, debelina $t = 17.5\,\mu\mathrm{m}$ pa pol unče bakra na kvadraten čevelj. Ker običajno velja $t \ll h, w$, v približkih marsikdaj smemo privzeti $t \rightarrow 0$ neskončno tanek trak. Načrtovalec ima največjo svobodo pri širini vodnika w, s pomočjo katere izbira željeno kapacitivnost, induktivnost in karakteristično impedanco.

Referenčno ravnino mase mikrotrakastega voda privzamemo neskončno veliko. Prav tako privzamemo neskončno velik prazen polprostor nad tiskanim vezjem. V resnici si neskončnosti ne moremo privoščiti. V večini primerov zadošča, da se ravnina mase in prazen polprostor nad vezjem raztezata na vsaj $s > 3\mathrm{h}$ trikratno debelino podlage.

Ko je razdalja med sosednjima mikrotrakastima vodoma manjša od trikratne debeline podlage $(s < 3\mathrm{h})$, presluh med vodoma ni več zanemarljiv. Elektromagnetno polje dveh sklopljenih vodov opisujeta sodi in lihi rod valovanja. Sodi rod (sofazni rod, angleško: even mode) valovanja vzbudimo tako, da izvor priključimo sofazno (vzporedno) na oba mikrotrakasta voda.

Lihi rod (protifazni rod, angleško: odd mode) valovanja vzbudimo tako, da izvor priključimo protifazno (zaporedno) na oba mikrotrakasta voda. Ravnina mase GND na drugi strani tiskanega vezja ni nujno potrebna za lihi rod. Brez ravnine mase lihi rod predstavlja preprost simetričen dvovod na tiskanem vezju. Slednjega pogosto uporabljajo hitra logična vezja pri frekvenci ure (takta) nad $f > 1\,\mathrm{GHz}$.

Komplementarni zgled mikrotrakastega voda je režasti vod (angleško:

slotline), kjer uporabimo natančno tiste ploskve bakra, ki smo jih pri jedkanju mikrotrakastega voda odstranili. Režasti vod sestavljata dve neskončni polravnini, ki ju ločuje reža širine s . Vir priključimo med obe polravnini. V praksi morata biti obe polravnini veliki v primerjavi z valovno dolžino, zato se režasti vod najpogosteje uporablja v antenah.

Dva sklopljena režasta voda na razdalji w dajeta koplanarni vod (angleško: coplanar waveguide ali CPW). V koplanarnem vodu običajno vzbujamo le sodi rod tako, da po srednjem vodniku peljemo signal, obe neskončni polravnini pa delujeta kot masa GND. Koplanarni vod lahko izdelamo na enostranskem tiskanem vezju. Koplanarni vod uporabljajo monolitna integrirana vezja za zelo visoke frekvence tudi nad $f > 100\,\mathrm{GHz}$, kjer bi imele drugačne vrste trakastih vodov neprimerno karakteristično impedanco Z_K oziroma prevelike izgube.

Koplanarni vod ima lahko tudi dodatno ravnino mase GND na drugi strani tiskanega vezja (angleško: coplanar waveguide with ground ali grounded coplanar waveguide). Koplanarni vod z dodatno ravnino mase je pravzaprav križanec med navadnim koplanarnim vodom in mikrotrakastim vodom. Če dobro povežemo obe polravnini in spodnjo ravnino mase s številnimi metaliziranimi »via« luknjami na tiskanem vezju, ima koplanarni vod z dodatno ravnino mase zelo majhen presluh do sosednjih vodov.

Čeprav vsi opisani vodi uporabljajo trakaste vodnike, izraz trakasti vod (angleško: stripline) v ožjem pomenu besede opisuje vode v večslojnih tiskanih vezjih, kjer je elektromagnetno polje omejeno med dve ravnini mase. Dielektrik ϵ_r med obema ravninama mase je homogen in vsebuje enega ali več trakastih signalnih vodnikov v enem ali več slojih med obema ravninama mase. Prednosti trakastega »sendviča« so elektromagnetno zaključena naloga brez zunanjega polja, homogen dielektrik ϵ_r omogoča prave TEM rodove valovanja, vodniki v več slojih eden nad drugim pa poljubno velik elektromagnetni sklop.

Katerikoli trakasti vod je zelo zahtevna elektromagnetna računska naloga. Trakasta geometrija zahteva konformno preslikavo v drugačen koordinatni sistem, kjer lahko sploh iščemo analitsko rešitev naloge. Prisotnost dveh različnih dielektrikov, podlaga $\epsilon_r > 1$ in prazen prostor (zrak) $\epsilon \approx \epsilon_0$, zahteva vzdolžni komponenti električnega in magnetnega polja, kar onemogoča prave TEM rodove, onemogoča strogo definicijo električne napetosti U in karakteristične impedance Z_K . V nadaljevanju si bomo natančneje ogledali vse opisane pojave v mikrotrakastem vodu, ki se od vseh trakastih vodov danes najpogosteje uporablja.

Statični kapacitivnost in induktivnost mikrotrakastega voda je analitsko

izračunal šele Harold Alden Wheeler najprej za mikrotrakasti vod v zraku oziroma homogenem dielektriku (1964) in leto kasneje še za mikrotrakasti vod na poljubni podlagi $\epsilon_r \geq 1$, nad katero je prazen polprostor (zrak) $\epsilon \approx \epsilon_0$ oziroma drugačen dielektrik. Iz statičnih kapacitivnosti in induktivnosti se da preprosto izračunati TEM približek karakteristične impedance Z_K , ki je povsem uporaben pri nizkih frekvencah, ko so prečne izmere voda $h, w, t \ll \lambda$ majhne v primerjavi z valovno dolžino.

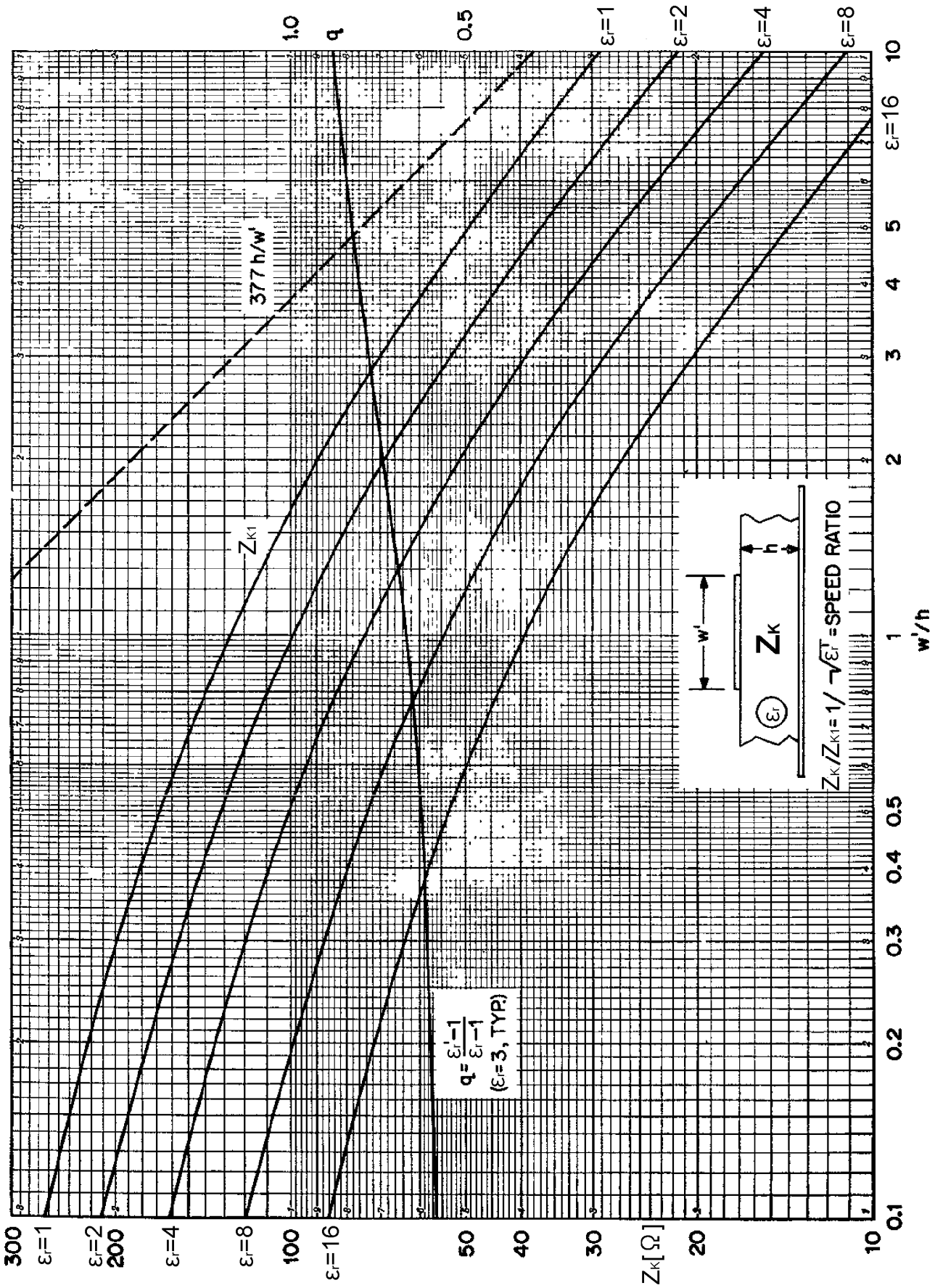
Wheeler je za komplicirane analitske rešitve mikrotrakastega voda poiskal tudi preproste približne izraze zadovoljive natančnosti za vse inženirske naloge. Približne izraze je najprej zapisal posebej za ozke trakove (majhno razmerje w/h) in posebej za široke trakove (veliko razmerje w/h), kar se večinoma uporablja še danes. V svojem zadnjem članku iz leta 1977 je Wheeler predstavil en sam res dober približek, ki deluje v celotnem uporabnem razponu $0.1 \leq w/h \leq 10$.

V svojem približku Wheeler najprej zamenja resnični mikrotrakasti signalni vodnik širine w in nezanemarljive debeline $t>0$ z neskončno tankim trakom $t' \to 0$ nekoliko večje širine w' :

$$w' \approx w + t \cdot \left(\frac{1+\frac{1}{\epsilon_r}}{2\pi} \right) \cdot \ln \left(\frac{4\,\mathrm{e}}{\sqrt{\left(\frac{t}{h}\right)^2 + \left(\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\frac{w}{t} + \frac{11}{10}} \right)^2}} \right) \qquad \mathrm{e} = 2.718\ldots$$

Z novim razmerjem w'/h in valovno impedanco praznega prostora $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 120\pi\,\Omega$ se Wheelerjev približek Z_K glasi:

$$Z_K \approx \frac{Z_0/2\pi}{\sqrt{2(1+\epsilon_r)}} \cdot \ln \left(1 + \frac{4h}{w'} \left(\frac{14+\frac{8}{\epsilon_r}}{11} \cdot \frac{4h}{w'} + \sqrt{\left(\frac{14+\frac{8}{\epsilon_r}}{11} \cdot \frac{4h}{w'} \right)^2 + \pi^2 \cdot \frac{1+\frac{1}{\epsilon_r}}{2}} \right) \right)$$



Karakteristična impedanca mikrotrakastega voda (TEM približek Wheeler 1977)

Kompliciran računski izraz prikazuje graf za karakteristično impedanco

Z_K kot funkcijo razmerja w'/h in dielektričnosti podlage ϵ_r . V graf je Wheeler namenoma dodal tudi krivuljo $Z_K \approx 377\,\Omega \cdot h/w'$, ki opisuje karakteristično impedanco mikrotrakastega voda v zraku, če stresanje elektromagnetnega polja zanemarimo in upoštevamo le preprosto polje tik pod signalnim vodnikom. V resnici stresano električno polje povečuje kapacitivnost mikrotrakastega voda, stresano magnetno polje pa znižuje induktivnost mikrotrakastega voda. Primerjava s krivuljo $Z_{K1} = Z_K(\epsilon_r = 1)$ pokaže, da moramo v vseh praktičnih primerih upoštevati celotno elektromagnetno polje vključno s stresanjem!

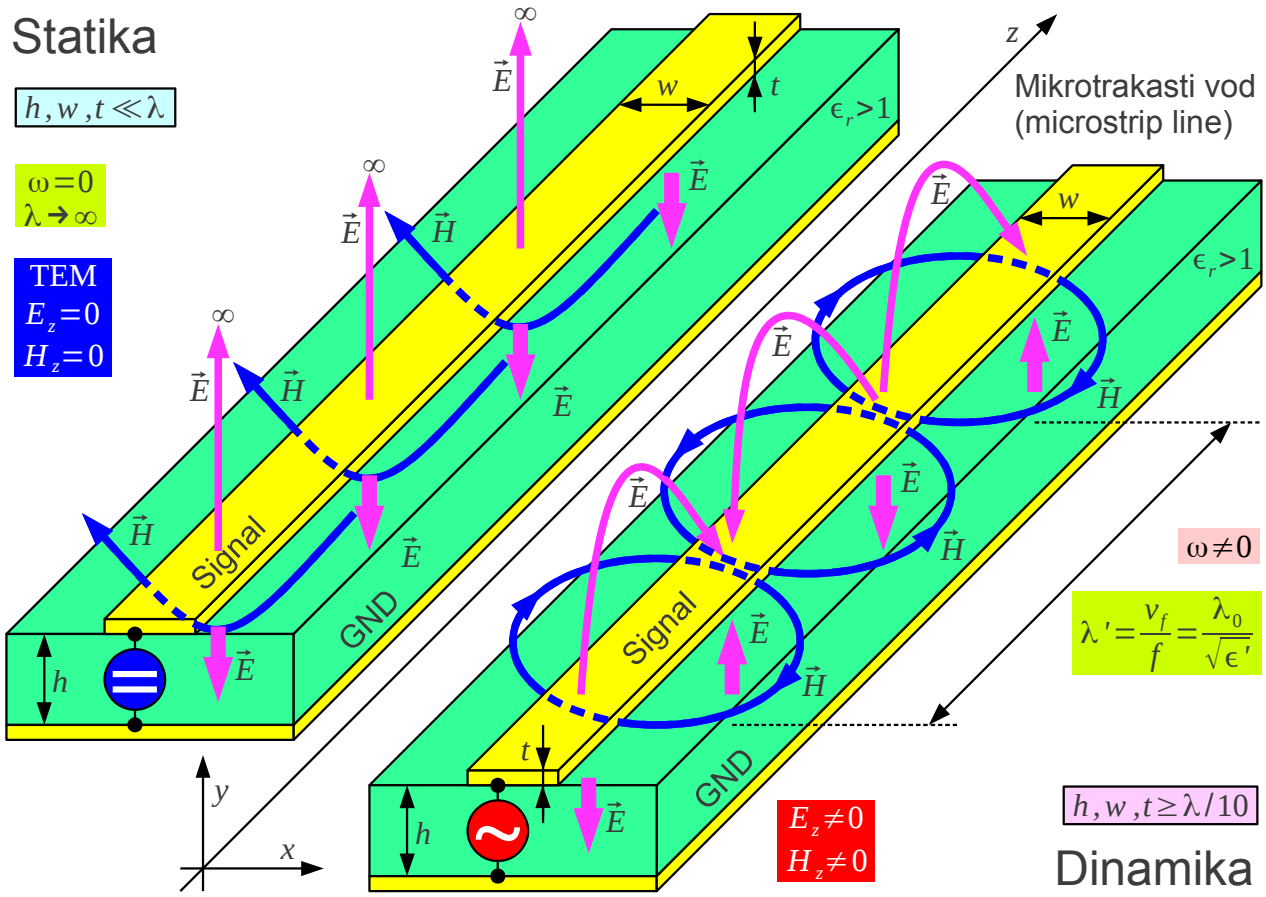
Elektromagnetno polje mikrotrakastega voda se nahaja večinoma v dielektriku podlage $\epsilon_r \geq 1$, znaten del stresanega polja pa sega tudi v prazen polprostor (zrak) $\epsilon \approx \epsilon_0$ nad podlago. Fazna hitrost valovanja v mikrotrakastem vodu $v_f \geq c_0/\sqrt{\epsilon_r}$ je zato nekoliko višja od fazne hitrosti v homogenem dielektriku podlage. Pojav opisuje navidezna dielektrična konstanta $\epsilon_r' = (c_0/v_f)^2$ mikrotrakastega voda.

Navidezno dielektrično konstanto $1 \leq \epsilon_r' \leq \epsilon_r$ določa faktor q , ki pove, kolikšen del polja je v podlagi. Za faktor q obstaja preprost, a dokaj natančen približek:

$$q = \frac{\epsilon_r' - 1}{\epsilon_r - 1} \approx \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + 10\,h/w}} \right)$$

Karakteristično impedanco Z_K in navidezno relativno dielektrično konstanto ϵ_r' smemo računati preko navedenih izrazov v primeru, ko so vse prečne izmere trakastega voda $h, w, t \ll \lambda$ dosti manjše od valovne dolžine. V tem primeru je elektromagnetno polje zelo podobno statičnemu polju, ki nima niti vzdolžne komponente električnega polja $E_z = 0$ niti vzdolžne komponente magnetnega polja $H_z = 0$.

V elektrostatiki in magnetostatiki segajo silnice elektromagnetnega polja tudi v neskončnost polprostora nad mikrotrakastim vodom. V elektrodinamiki valovanje potuje počasneje v podlagi $\epsilon_r \geq 1$ kot pa v praznem polprostoru $\epsilon \approx \epsilon_0$ nad njo. Namesto v neskončnost se silnice električnega in magnetnega v praznem polprostoru zasukajo nazaj proti trakastemu vodniku, kjer je upočasnjeno valovanje hitreje menja in obrne fazo:



Z višanjem frekvence in krajšanjem valovne dolžine se začne manjšati delež polja v praznem polprostoru. Elektromagnetno polje sili v počasnejšo podlago z dielektričnostjo $\epsilon_r \geq 1$, kar upočasnjuje valovanje. Z višanjem frekvence navidezna dielektričnost mikrotrakastega voda narašča $\epsilon_r' \to \epsilon_r$ proti dielektričnosti podlage.

Ukrivljanje silnic električnega in magnetnega polja v smeri potovanja valovanja pomeni, da imata tako električno $E_z \neq 0$ kot magnetno polje $H_z \neq 0$ mikrotrakastega voda od nič različno vzdolžno komponento. Od nič različna vzdolžna komponenta magnetnega polja $H_z \neq 0$ pomeni, da integracija $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ daje različen rezultat po različnih poteh v isti izbrani prečni ravnini $z = konst.$ Ko valovanje ni TEM (prečno elektromagnetno), ne moremo definirati napetosti U med vodnikoma.

Brez definicije napetosti U je nemogoče definirati karakteristično impedanco Z_K. Strogo gledano karakteristična impedanca Z_K mikrotrakastega voda obstaja samo za $\omega = 0$ (enosmerna). Isto definicijo Z_K je smiselno uporabljati tudi pri nizkih frekvencah, ko so prečne izmere mikrotrakastega voda $h, w, t < \lambda/10$ manjše od desetine valovne dolžine v podlagi $\lambda = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_r}$. Tedaj so vzdolžne komponente elektromagnetnega

polja zelo majhne.

V strokovni literaturi je pogosto navedena karakteristična impedanca Z_K mikrotrakastega voda tudi pri višjih frekvencah, ko prečne izmere presežejo $h, w, t \geq \lambda/10$. Po nekaterih izračunih karakteristična impedanca Z_K mikrotrakastega voda s frekvenco narašča, po drugih izračunih pa ista veličina s frekvenco upada? Pameten človek bo verjetno zaključil, da nima smisla računati veličin, ki fizikalno ne obstajajo niti jih ne znamo izmeriti...

Pri elektromagnetnem polju mikrotrakastega voda obstaja svetla izjema. Ko je podlaga zrak oziroma je gornji polprostor zapolnjen z enako snovjo kot podlaga, je dielektrik povsem homogen. V takšnem mikrotrakastem vodu je osnovni rod vedno TEM ne glede na frekvenco.

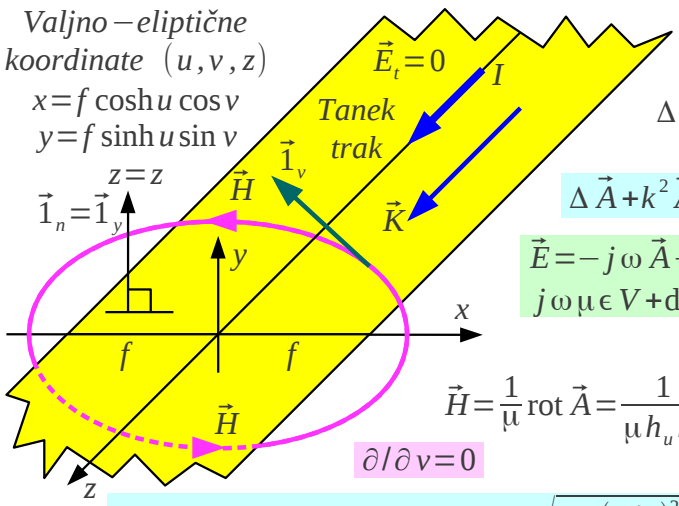
Z višanjem frekvence lahko prav v vsakem prenosnem vodu vzbudimo višje rodove, ki običajno niso TEM . V mikrotrakastem vodu se višji rodovi pojavijo takrat, ko najmanj ena od prečnih izmer $h, w, t > \lambda/2$ preseže polovico valovne dolžine v podlagi $\lambda = \lambda_0/\sqrt{\epsilon_r}$. Z večanjem prečnih izmer postane nezanemarljivo tudi sevanje mikrotrakastega voda, ki se lahko obnaša kot antena.

Trakasti vodi na tiskanem vezju imajo večje izgube od drugih električnih vodov primerljivega prereza. Poleg izgub zaradi upornosti vodnikov lahko izgube dodaja tudi izolirna podlaga, ki ni izdelana iz najprimernejšega dielektrika. Povrhu dielektrik znižuje karakteristično impedanco voda Z_K in posredno povečuje delež izgubljene moči v vodnikih. Trakasti vodniki niso najprimernejša oblika za elektromagnetno polje. Končno, način pritrditve trakastih vodnikov na podlago še dodatno povečuje izgube.

Običajen vitroplast (oznaka »G10« ali »FR4«) je izdelan iz steklenih vlaken, ki so zlepljena v laminat s pomočjo epoksidne smole. Glede na razmerje količin vlakna/smola se relativna dielektričnost vitroplasta giblje v območju $\epsilon_r = 4...5$. Tangens izgubnega kota takšnega dielektrika je okoli $\tan\delta = 0.02$ v širokem razponu frekvenc. Visoke dielektrične izgube pomenijo tudi znatno upadanje relativne dielektričnosti $\epsilon_r = \epsilon_r(f)$ s frekvenco.

Namenski mikrovalovni teflonski laminati so prav tako ojačani z vlakni. Glede na razmerje vlakna/teflon se relativna dielektričnost podlage giblje v območju $\epsilon_r = 2.2...2.5$. Tangens izgubnega kota teflonskega dielektrika je okoli $\tan\delta = 0.001$ v področju mikrovalov. Najsodobnejši laminati skušajo združiti oboje, majhne dielektrične izgube teflona in mehansko trdnost vitroplasta v istem izdelku.

Trakast vodnik naj bi bil na prvi pogled ugodnejši od vodnika krožnega prereza, ker je pri istem preseku obseg traku večji, kar pomeni širši sloj kože, po kateri teče visokofrekvenčni tok. Žal se pri visokih frekvencah tok ne izrine samo na površino vodnika (kožni pojav) pač pa tudi proti robovom traku. Pojav si je najlažje ogledati na dolgem, osamljenem kovinskem traku iz dobrega prevodnika širine $2f$ v smeri osi x in zanemarljive debeline v smeri osi y z izmeničnim tokom I v smeri osi z :



$h_u=h_v=f\sqrt{\sinh^2 u+\sin^2 v}\quad h_z=1$ $\quad\vec{A}=\vec{1}_z A_z$

$$\Delta\vec{A}=\frac{\vec{1}_z}{f^2(\sinh^2 u+\sin^2 v)}\left[\frac{\partial^2 A_z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial v^2}\right]+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}$$

$$\Delta\vec{A}+k^2\vec{A}=-\mu\vec{J}(u\neq 0)=0\ \rightarrow\ \vec{A}=\vec{1}_z(C_1 u+C_2)e^{-jkz}$$

$$\vec{E}=-j\omega\vec{A}-\operatorname{grad}V$$
$$j\omega\mu\epsilon V+\operatorname{div}\vec{A}=0$$

$$E_z(u=0)=0=-j\omega\left[A_z+\frac{1}{k^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right]$$

$$\vec{H}=\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}=\frac{1}{\mu h_u h_v}\begin{vmatrix} h_u\vec{1}_u & h_v\vec{1}_v & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial z} \\ h_u 0 & h_v 0 & A_z \end{vmatrix}=-\vec{1}_v\frac{C_1 e^{-jkz}}{\mu f\sqrt{\sinh^2 u+\sin^2 v}}$$

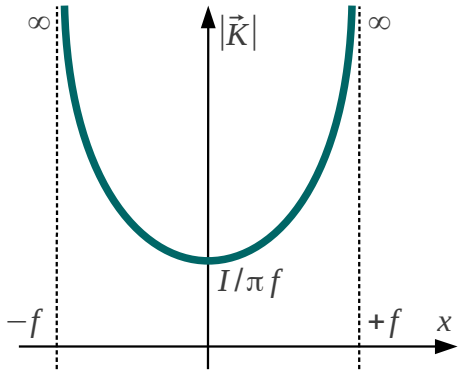
$\partial/\partial v=0$

$Trak\quad u=0\quad x=f\cos v\quad \sin v=\sqrt{1-(x/f)^2}$

$$\vec{H}(u=0)=-\vec{1}_v\frac{C_1 e^{-jkz}}{\mu f\sin v}=-\vec{1}_v\frac{C_1 e^{-jkz}}{\pm\mu\sqrt{f^2-x^2}}$$

$$\vec{K}=\vec{1}_y\times\left[\vec{H}(+v)-\vec{H}(-v)\right]=-\vec{1}_z\frac{2C_1 e^{-jkz}}{\mu\sqrt{f^2-x^2}}=\vec{1}_z\frac{I}{\pi\sqrt{f^2-x^2}}$$

$$I=\int_{-f}^{+f}\vec{K}\cdot\vec{1}_z dx=-\frac{2C_1 e^{-jkz}}{\mu}\int_{-1}^{+1}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}=-\frac{2\pi C_1 e^{-jkz}}{\mu}$$



Porazdelitev toka na traku

Kovinski trak najlažje opišemo v valjno-eliptičnih koordinatah (u,v,z) , kjer goriščnico elipse priredimo širini traku. Glede na vzbujanje mora biti vektorski potencial $\vec{A}$ usmerjen v smer z . Najpreprostejša rešitev v valjno-eliptičnih koordinatah je potujoči val v smeri osi z , kar daje odvisnost e^{-jkz} . Vektorski potencial $\vec{A}$ ne sme biti funkcija koordinate v , sicer ne moremo zadostiti pogoju $\vec{1}_n\times\vec{E}=0$ oziroma $\vec{E}_t=0$ kjerkoli na površini traku. Predlagana rešitev valovne enačbe v okolici traku $u\neq 0$ dopušča preprosto (linearno) odvisnost od koordinate u .

Električno polje $\vec{E}=-j\omega\vec{A}-\operatorname{grad}V$ izračunamo iz vektorskega potenciala tako, da skalarni potencial $V=j/(\omega\mu\epsilon)\operatorname{div}\vec{A}$ nadomestimo skladno z Lorentzovo izbiro. Predlagana rešitev za vektorski potencial daje

$E_v = 0$ (ker ni odvisnosti od v) in hkrati $E_z = 0$, torej ni tangencialne komponente električnega polja nikjer na površini traku.

Magnetno polje $\vec{H} = 1/\mu \operatorname{rot} \vec{A}$ izračunamo iz vrtinčena vektorskega potenciala. Razlika magnetne poljske jakosti tik nad $\vec{H}(u \to 0, +v)$ in tik pod $\vec{H}(u \to 0, -v)$ vodnikom preko prestopnih pogojev določa gostoto ploskovnega toka $\vec{K}(x)$ v vodniku. Tok I v vodniku dobimo tako, da seštejemo (integriramo) ploskovni tok $\vec{K}$ po celotni širini vodnika.

Rešitev naloge pokaže, da tok ni enakomerno razporejen po širini traku. Gostota ploskovnega toka $\vec{K}(x=0)$ je najnižja sredi traku in narašča vse do neskončnosti $\vec{K}(x = \pm f) \to \infty$ proti robovom. Visoka gostota ploskovnega toka $\vec{K}$ tik ob robovih trakastega vodnika pomeni zelo velike izgube. Enakovreden pojav kot za osamljen trakast vodnik upravičeno pričakujemo tudi za vse ostale primere z dvema ali več trakastimi vodniki.

V neskončno tankem traku $t \to 0$ iz kovine s končno prevodnostjo $\gamma < \infty$ so izgube neskončno velike. Čeprav je debelina traku na tiskanem vezju $t \gg \sqrt{2/\omega\mu\gamma}$ običajno precej večja od vdorne globine, ima t še vedno velik vpliv na izgube zaradi izriva toka na robove traku. Pri določanju karakteristične impedance Z_K smemo debelino traku $t \to 0$ marsikdaj zanemariti, pri določanju izgub pa moramo debelino traku t dosledno upoštevati!

V laminatu za tiskana vezja mora biti kovinska folija dobro pritrjena na izolirno podlago, da prenese toploto spajkanja in nato nosi vgrajene elektronske gradnike. Na strani podlage je kovinska folija zato namenoma hrapava, da pri stiskanju laminata smola prodre v luknjice in zagrabi za izbolkline iz kovine. Ker je hrapavost večja od vdorne globine mikrovalov v kovino, hrapavost podaljšuje pot toka po koži in znatno povečuje izgube v kovinskih vodnikih na mikrovalovnih frekvencah.

Zunanja obdelava, srebrenje ali zlatenje kovinske folije na obeh straneh tiskanega vezja prav nič ne pripomorejo k zmanjšanju izgub mikrotrakastega voda. Magnetno polje $\vec{H}$ je najmočnejše v podlagi tik pod vodniki. Torej je gostota ploskovnega toka $\vec{K}$ največja prav na hrapavih površinah, ki končnemu uporabniku laminata niso dostopne.

Hrapavost bakrene folije je na običajnem vitroplastu tako visoka, da se izgube zaradi daljše poti toka v vodnikih povečajo tudi za faktor petkrat. Izgube v bakrenih vodnikih so tedaj v istem velikostnem razredu kot

dielektrične izgube vitroplasta. Skupaj ima mikrotrakasti vod na vitroplastu za en velikostni razred (desetkrat) višje slabljenje od koaksialnega kabla primerljivega prereza. Namenski mikrovalovni laminati uporabljajo manj hrapav baker za nižje izgube, a žal tudi slabšo mehansko trdnost.

Glavni namen tega zadnjega poglavja v knjigi je združiti vse pridobljeno znanje elektrodinamike za reševanje resničnih nalog, ki daleč presegajo dopustno zahtevnost šolskega zgleda. Dober inženir se mora hitro odločiti, kaj bo rešil z analitsko izpeljavo, kaj s približki, kaj z računalniško simulacijo, kaj z utemeljeno oceno in kaj bo izmeril v poskusih. Ni vse zlato, kar se sveti niti kar je objavljeno v priznanih revijah in knjigah. Nazoren primer so različne in nezdružljive definicije karakteristične impedance vodov, ki niso TEM !

Trakasti vodniki najrazličnejših izvedb so danes prisotni v vseh tiskanih vezjih kot tudi znotraj monolitnih integriranih vezij. Prav nič ne kaže, da bi se v bodočnosti lahko izognili trakastim vodnikom v telekomunikacijski in drugi elektroniki. Učinkovita uporaba trakastih vodov zahteva najprej dobro poznavanje osnovnih pojmov, kot so karakteristična impedanca Z_K , fazna hitrost v_f oziroma skupinska hitrost v_g valovanja, slabljenje itd.

Nato moramo poznati še posebnosti samih trakastih vodov z zahtevno geometrijo, nehomogenim dielektrikom, vzdolžnimi komponentami polja, višjimi rodovi in sevanjem ne glede na to, če je slednje zaželjeno ali ne. Vse skupaj izgleda strahotna težava za črnogledega računalniškega inženirja, ki bi rad zvišal frekvenco ure (takta) svojih logičnih vezij. Mogoče je napaka v šolanju, saj so računalniškega inženirja učili samo o parazitnih kapacitivnostih, parazitnih induktivnostih in številnih drugih nadlogah resničnih vezij tega sveta, ki samo kazijo sanje prečudovitih digitalij.

Dober inženir vidi nalogo drugače. Resničnost je analogna in ni nujno sovražna. Svojemu črnogledemu sodelavcu bo takoj razložil, da je energija v kondenzatorjih ali drugačnih reaktivnih gradnikih nujno potrebna za hranjenje informacije v kateremkoli računalniku. Kapacitivnost torej nikakor ni parazitna, pač pa je nujno potrebna za delovanje naprave!

Ni nujno, da trakaste vode katerekoli izvedbe uporabljano samo kot prenosne vode. Iz trakastih vodov različnih izvedb se da na istem tiskanem vezju izdelati tudi tuljave, kondenzatorje, transformatorje impedance, zakasnilne vode, delilnike moči, smerne sklopnike, frekvenčna sita vseh možnih izvedb in povrhu še antene! Edina omejitev je domiselnost načrtovalca, snovi pa je za skromen učbenik elektrodinamike daleč preveč...

* * * * *

ELEKTRODINAMIKA

Elektrodinamika je nadaljevanje ter razširitev osnov elektrotehnike, bolj točno obravnava tisti del elektromagnetike, ki ga potrebujejo telekomunikacije. Eno-dimenzijske pojave na prenosnih vodih oziroma telegrafsko enačbo obravnava preko nadomestnih vezij v časovnem in v frekvenčnem prostoru. Tri-dimenzijske pojave v neomejenem prostoru, v omejenem prostoru in v snovi z izgubami obravnava preko Maxwellovih enačb v diferencialni obliki v frekvenčnem prostoru. Pri tem uvede računska pripomočka vektorski potencial in Poyntingov vektor. Elektromagnetno sevanje vira, radijske antene ali svetila, postane na velikih razdaljah podobno ravninskemu valu. Dva ali več ravninskih valov sestavljajo stojni val v eni ali več dimenzijah. Stojni val obstaja tudi v omejenem prostoru, na primer v votlinskem rezonatorju. Potujoči val v eni dimenziji in stojni val v ostalih dveh dimenzijah opisujeta elektromagnetne pojave v valovodu. Valovanje v snovi z izgubami vnaša slabljenje v zvezo in izriva tok na površino kovin, kar imenujemo kožni pojav. Učbenik zaključi kratko poglavje o posebnostih trakastih vodov.

KLJUČNA GESLA

elektromagnetika, elektrodinamika, telegrafska enačba, koordinatni sistem, Maxwellove enačbe, vektorski potencial, elektromagnetno sevanje, antena, votlinski rezonator, valovod, slabljenje, kožni pojav, trakasti vod.

M. VIDMAR

Matjaž Vidmar je redni profesor na Fakulteti za elektrotehniko. Njegovo področje dela obsega elektromagnetiko, visokofrekvenčno tehniko, antene in razširjanje valov, optične komunikacije, radijske komunikacije, radiolokacijo, radionavigacijo, avioniko, satelitsko tehniko in radioastronomijo.

ISBN 978-961-243-399-4

9 789612 433994

ZALOŽBA FAKULTETE ZA ELEKTROTEHNIKO